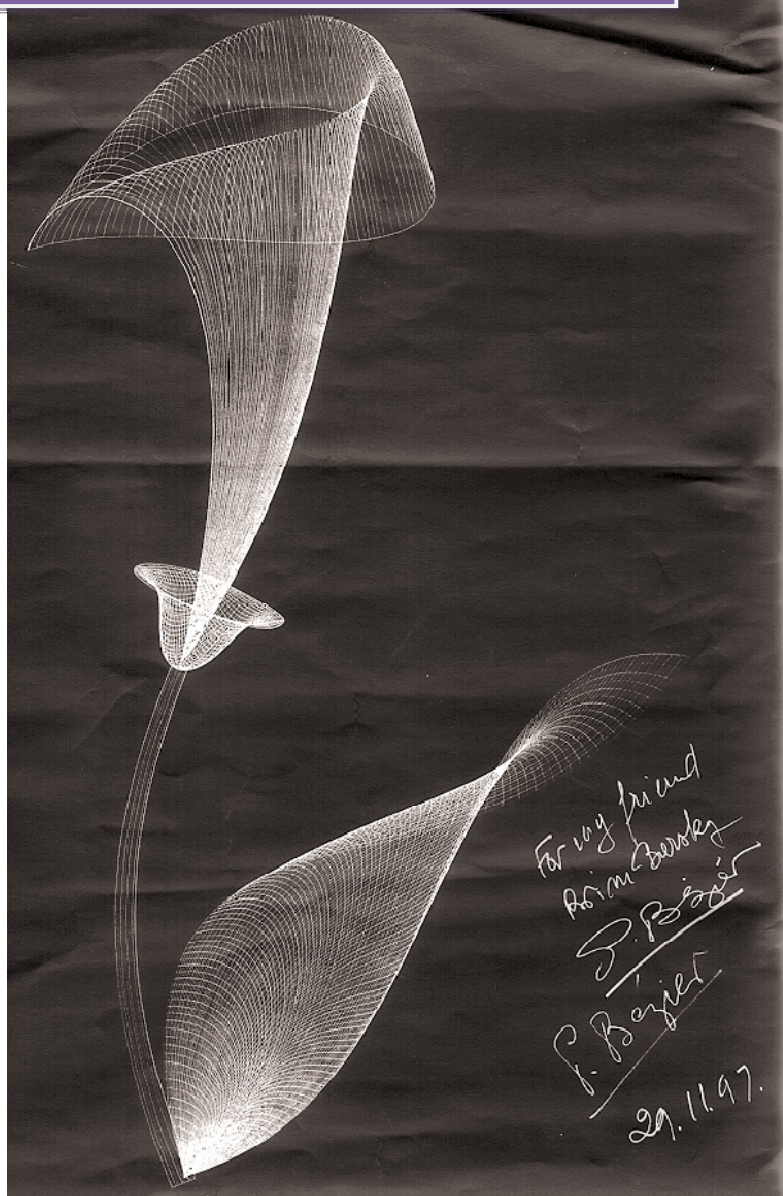


Desarrollo y evolución de las curvas de Bézier aplicadas al diseño gráfico



Víctor Ceballos Inza

Internacional Baccalaureate

Código del alumno: 000405-006

*"No hay rama de la matemática,
por abstracta que sea, que no
pueda aplicarse algún día a los
fenómenos del mundo real."*

Nikolai Lobachevski

Resumen

Las matemáticas, aunque no de manera explícita, están presentes en muchos ámbitos de la vida cotidiana. Entre otros muchos de sus usos, destaca el diseño de las carreteras: ¿cómo se trazan las rutas por las que circularán nuestros automóviles?

Gracias a la geometría analítica, no es complicado el estudio de puntos, rectas y funciones polinómicas. Pero... ¿qué ocurre cuando buscamos una curva cuya forma se ajuste a unas determinadas condiciones geográficas o topográficas?

Se evidencia entonces la utilidad de las curvas de Bézier, que reciben su nombre de un ingeniero parisino de comienzos del siglo XX.

Estas curvas se basan sobre los polinomios de Bernstein, que constituyen una base del espacio vectorial de polinomios:

$$b_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad x \in [0, 1], \quad i = 0, \dots, n$$

Así, las curvas asocian a cada término de este polinomio las coordenadas de un determinado punto, y logran definir una infinidad de formas diferentes con tan sólo modificar sus denominados puntos de control:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i, \quad t \in [0, 1]$$

Para poder manejar con soltura este tipo de curvas, se ha deducido de la fórmula anterior otra expresión, exclusiva de esta monografía:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i \left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P_k (-1)^{i+k} \right], \quad t \in [0, 1]$$

Sin embargo, estas curvas también presentan sus inconvenientes a la hora de diseñar trazados más complicados. Por ello, se desarrollaron los *splines* (o funciones a trozos) de Bézier, que, a su vez, dieron lugar a los *B-Splines*.

$$S(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) P_i, \quad t \in [x_k, x_{n+1}]$$

Éstas últimas son, al igual que las primeras, un tipo de curvas paramétricas. Se distinguen fundamentalmente en las funciones de base sobre las que se construyen. Pero, a diferencia de las anteriores, engloban unas curvas formadas a su vez por otras más pequeñas, evitando así los problemas de continuidades.

Con todos estos elementos, se puede ya realizar el diseño de carreteras y otras aplicaciones concretas (letras tipográficas, dibujos de animación...), comprobando la utilidad de los distintos métodos en el diseño asistido por ordenador, así como las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

Contenido

<u>Agradecimientos</u>	pág.6
<u>Introducción</u>	pág.7
<u>Contexto académico</u>	pág.9
<u>Investigación</u>	pág.10
1. Las matemáticas de la investigación	pág.10
1.1. Polinomios de Bernstein.....	pág.10
1.2. Las curvas de Bézier.....	pág.14
1.2.1. Descripción y construcción de las curvas	pág.14
1.2.2. Propiedades de las curvas de Bézier	pág.15
1.2.3. Desventajas de las curvas de Bézier.....	pág.20
1.3. Introducción a los <i>Basis-Splines</i>	pág.21
1.3.1. Definición de los <i>B-Splines</i>	pág.21

2. Aplicaciones	pág.22
2.1. Situaciones a modelar.....	pág.22
2.1.1. Carreteras.....	pág.22
2.1.2. Caracteres tipográficos	pág.29
2.1.3. Diseño gráfico	pág.32
2.2. Otras aplicaciones.....	pág.34
<u>Conclusiones</u>	pág.36
<u>Bibliografía</u>	pág.37
<u>Apéndice</u>	pág.38
1. El algoritmo de De Castel'au	pág.38
2. Los <i>Basis Splines</i>	pág.40
2.1. Funciones de base de los <i>B-Splines</i>	pág.40
2.2. Tipos de vectores de nodos.....	pág.41
2.3. Propiedades de los <i>B-Splines</i>	pág.41
2.4. Algoritmo de De Boor	pág.42

Agradecimientos

En primer lugar debo reconocer la inestimable ayuda de Constantino de la Fuente Martínez, profesor de matemáticas y orientador en el desarrollo de esta monografía, sin quien no hubiera podido salir de los inconvenientes que surgían durante la elaboración del trabajo y a quien corresponde gran parte del mérito.

Debo agradecer también a mi familia el apoyo que me ha proporcionado para que no me desanimase en las largas jornadas de investigación y redacción en las que los problemas no se solucionaban tan fácilmente.

Y finalmente me gustaría mencionar a mis compañeros, con los que he compartido esta experiencia y con los que he intercambiado impresiones de nuestras respectivas monografías a lo largo de todo el proceso.

Introducción

Las áreas de aplicación de las matemáticas son prácticamente infinitas, y pasan muchas veces inadvertidas en la vida cotidiana. Son fundamentales desde en los billetes de avión, hasta en los medios de comunicación más modernos, pasando por el trazado de las carreteras.

Y es este último el objetivo de la investigación: ¿qué matemáticas hay ocultas tras el trabajo de los ingenieros que diseñan las vías de los automóviles? Es decir, ¿cómo se diseñan las carreteras?

El problema se enmarca dentro del contexto del diseño gráfico, y por ello esta monografía constituirá un análisis de la rama de la geometría analítica.

La *geometría analítica* se dedica al estudio de las formas mediante técnicas del análisis matemático y del álgebra en un sistema de coordenadas. Así, no resulta excesivamente complejo determinar la posición de puntos, vectores, funciones u otras expresiones matemáticas¹.

Para definir una recta basta, por ejemplo, con conocer las coordenadas de dos de sus puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$.

Pero si en lugar de trazar una línea recta entre dichos puntos, se unen mediante una curva, surgen los elementos esenciales del estudio que vamos a desarrollar:

Las *funciones polinómicas* surgen de evaluar en un sistema cartesiano los polinomios, expresiones matemáticas sencillas en las que sólo intervienen las operaciones de adición, multiplicación y potenciación.

Al representarlos, los polinomios pueden, en principio, tener cualquier forma: ya sea curva, con segmentos rectos en su dominio, infinitamente derivable en algunos de sus puntos...

El conjunto de todos los polinomios que se pueden expresar con el conjunto de los números reales \mathbb{R} se denomina espacio vectorial de polinomios².

Una *base* de un espacio vectorial es una colección de elementos del espacio, vectores o polinomios, que verifican que todo elemento de este espacio puede expresarse como la unión de dichos elementos³.

¹ Se debe apreciar que la investigación de este trabajo abarca únicamente superficies planas y ninguna explicación en ella se refiere a espacios tridimensionales.

² Un *espacio vectorial* sobre un cuerpo K (el cuerpo de los números reales, por ejemplo) es un conjunto V , no vacío, con dos operaciones, tal que la suma es una operación interna y el producto es una operación externa.

³ La base canónica de $P_n[x]$ es la formada por los polinomios: $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$

Se llama *dimensión* de un espacio vectorial, al número de vectores, aquí polinomios, que constituyen la base de dicho espacio. La dimensión del espacio vectorial de polinomios de grado n será $n + 1$.

Los escalares por los que debemos multiplicar a los polinomios de una base para obtener a un polinomio dado se denominan *coordenadas* del polinomio en esa base.

Todos estos conceptos serán necesarios a la hora de expresar de una manera sencilla con polinomios las curvas de los trazados que necesitemos.

Sin embargo, las fórmulas que utilizaremos no serán funciones. Entonces, en lugar de trabajar con una variable independiente de cuyos valores se deduzcan los de la variable dependiente, representaremos las curvas mediante parámetros.

Las *curvas paramétricas* del estudio serán de la forma⁴:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i \quad , \quad t \in [0, 1]$$

⁴ Hay que advertir también que la mayoría de las ecuaciones en su fórmula paramétrica que aparezcan en esta monografía estarán expresadas en función de las dos coordenadas cartesianas de un punto, con el fin de abreviar la extensión.

Es decir, la notación anteriormente usada es indistinta a la habitualmente utilizada:

$$B(t) \begin{cases} x(t) = \sum \binom{n}{i} x_i (1-t)^{n-i} t^i \\ y(t) = \sum \binom{n}{i} y_i (1-t)^{n-i} t^i \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Contexto académico

Este tema que abarca el estudio es de plena actualidad y se está renovando continuamente, puesto que el diseño gráfico por ordenador se emplea, no sólo en el trazado de carreteras, sino también en la producción de la mayoría de videojuegos, películas de animación...

En cambio, esta monografía se centra principalmente en analizar detalladamente un tipo de curvas que "rediseñaron" el mundo tras su invención en los años sesenta: las curvas de Bézier.

Supusieron una revolución tan importante que enseguida fueron integradas en los lenguajes PostScript de descripción de páginas. Actualmente se utilizan de manera corriente en muchos programas de diseño gráfico sin apenas hacer referencia a su nombre.

Así pues, tras recoger información e indagar en los aspectos menos estudiados de estas curvas, se presenta un trabajo que recopila el origen de las curvas de Bézier, su desarrollo, los primeros inconvenientes que presentaron y una pequeña introducción a los nuevos elementos gráficos que se descubrieron gracias a ellas.

Finalmente, se plantea ya la respuesta a la hipótesis de investigación: con toda la información reunida diseñaremos nosotros mismos algunas carreteras. Además, con los mismos métodos, esbozaremos también letras tipográficas y simples dibujos animados.

Una dificultad con la que nos encontramos fue cómo introducir las fórmulas paramétricas en los sistemas informáticos para poder representarlas.

Enseguida encontramos herramientas para el software GeoGebra que permitían trazar las curvas con sólo indicar los puntos. No obstante, también hay construcciones con sus expresiones analíticas que ayudaron considerablemente.

Gracias a ellas, nos pudimos servir únicamente de este sencillo programa informático para todas las representaciones gráficas. Además, siguiendo los ejemplos encontrados, construimos una herramienta original nuestra que traza mecánicamente otro tipo de curvas y que compartimos en el sitio web de GeoGebra.

La investigación

1. Las matemáticas de la investigación

La idea de la investigación de esta monografía surgió gracias a la lectura del artículo *Funciones a trozos: splines* (2009), que resume cómo trabajar con estas funciones a la vez que las relaciona con su enorme utilidad en las aplicaciones a problemas de diseño.

Entonces, se buscaron otras fuentes de información para profundizar en la materia, y fue cuando descubrimos las curvas de Bézier. Una vez encauzado el tema, encontramos una gran cantidad de artículos, trabajos y presentaciones que trataban estas curvas. Pero muchas de estas fuentes no trataban adecuadamente o se excedían al investigarlas.

Por ello, tras una selección de materiales teóricos y de aplicaciones prácticas, elaboramos la estructura de la monografía, redactando, revisando y modificando continuamente el contenido.

1.1. Polinomios de Bernstein

Los polinomios de Bernstein son un particular tipo de polinomios que forman una base para el espacio vectorial de polinomios.

Dada una función f en el intervalo $[a, b]$, los polinomios de Bernstein de grado n asociados a dicha función están definidos por:

$$b_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right), \quad i = 0, \dots, n$$

En el caso en que el intervalo sea el $[0, 1]$:

$$b_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right), \quad i = 0, \dots, n$$

Por lo que los polinomios básicos de Bernstein serán, sencillamente:

$$b_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad x \in [0, 1], \quad i = 0, \dots, n$$

que están asociados a la función $f(x) = 1, \quad \forall x$.

El espacio vectorial de polinomios⁵ es el conjunto $(P_n, +, \cdot)$ sobre el cuerpo de los números reales \mathbb{R} de tal forma que:

$$P_n[x] = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n \}$$

$$P_n[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n \right\}$$

El espacio vectorial de polinomios tiene una base formada por los polinomios de Bernstein. Esta base la podemos describir como el conjunto:

$$B_n = \left\{ \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \mid i = 0, \dots, n \right\}$$

Veamos un ejemplo para el espacio $P_3[x]$. Siendo un polinomio cúbico $P_3(x)$:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

ese polinomio, expresado en la base formada por los polinomios de Bernstein será:

$$P_3(x) = \lambda_0 \cdot b_0^3(x) + \lambda_1 \cdot b_1^3(x) + \lambda_2 \cdot b_2^3(x) + \lambda_3 \cdot b_3^3(x)$$

$$P_3(x) = \lambda_0 \cdot (1-x)^3 + \lambda_1 \cdot 3x(1-x)^2 + \lambda_2 \cdot 3x^2(1-x) + \lambda_3 \cdot x^3$$

Es decir, que $P_3(x)$ es combinación lineal de los polinomios de la base B_3 .

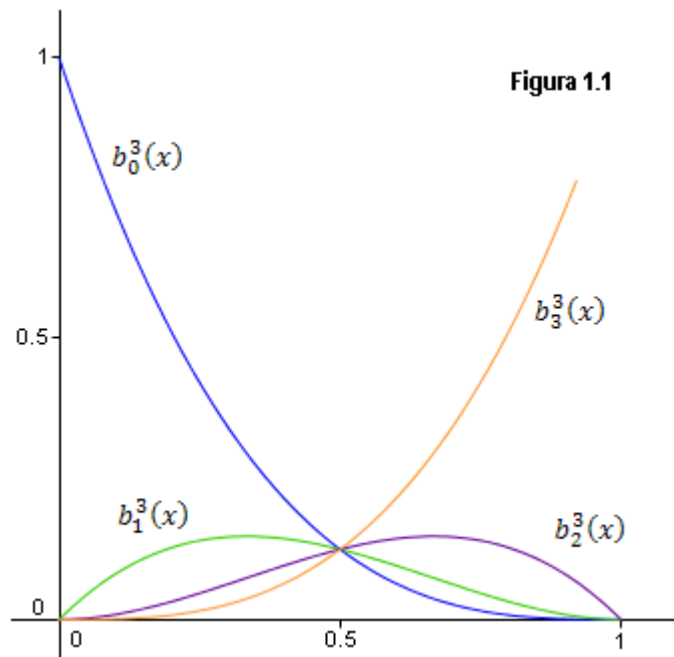


Figura 1.1

⁵ Un espacio vectorial sobre un cuerpo K es un conjunto V , no vacío, con dos operaciones, tal que cumple ciertas propiedades. Véase la introducción.

Para demostrar que los polinomios de Bernstein forman una base del espacio vectorial para cualquier dimensión, $n + 1$ basta con probar que son linealmente independientes; lo que implicará ya que generan todos los polinomios del espacio por combinaciones lineales, por ser $n + 1$ el número de ellos.

Para ello, se puede argumentar que los polinomios de Bernstein serán linealmente independientes si el determinante de la matriz formada por sus coordenadas en la base canónica del espacio vectorial de los polinomios es distinto de cero:

- Para $n = 1$; $b_0(x) = x$, $b_1(x) = (1 - x)$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow (0 \quad 1) \\ 1 - x \rightarrow (1 \quad -1) \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \textit{linealmente independientes}$$

- Para $n = 2$; $b_0(x) = x^2$, $b_1(x) = 2x(1 - x)$, $b_2(x) = (1 - x)^2$

$$\begin{array}{l} x^2 \rightarrow (0 \quad 0 \quad 1) \\ 2x(1 - x) = 2x - 2x^2 \rightarrow (0 \quad 2 \quad -2) \\ (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 \rightarrow (1 \quad -2 \quad 1) \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \textit{linealmente independientes}$$

- Para $n = 3$; $b_0(x) = x^3$, $b_1(x) = 3x^2(1 - x)$, $b_2(x) = 3x(1 - x)^2$, $b_3(x) = (1 - x)^3$

$$\begin{array}{l} x^3 \rightarrow (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \\ 3x^2(1 - x) = 3x^2 - 3x^3 \rightarrow (0 \quad 0 \quad 3 \quad -3) \\ 3x(1 - x)^2 = 3x - 6x^2 + 3x^3 \rightarrow (0 \quad 3 \quad -6 \quad 3) \\ (1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \rightarrow (1 \quad -3 \quad 3 \quad -1) \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \textit{linealmente independientes}$$

- ...

- Para $n = k$; $b_k(x) = \binom{n}{k} x^{n-k} (1-x)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 \binom{k}{k} x^k &= x^k \\
 \binom{k}{k-1} x^{k-1} (1-x) &= k \cdot x^{k-1} (1-x) \\
 \binom{k}{k-2} x^{k-2} (1-x)^2 & \quad \rightarrow \\
 & \quad \dots \\
 \binom{k}{1} x (1-x)^{k-1} &= k \cdot x (1-x)^{k-1} \\
 \binom{k}{0} (1-x)^k &= (1-x)^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & k & -k \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -2\binom{k}{2} & \binom{k}{2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & k & -(k-1)k & \dots & (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-2} \cdot k & (-1)^{k-1} \cdot k \\
 1 & -k & \binom{k}{2} & \dots & (-1)^{k-1} \cdot k & (-1)^k
 \end{vmatrix} \neq 0$$

\Rightarrow linealmente independientes⁶

Por lo tanto, toda curva polinómica de grado $\leq n$ tiene una posible representación con polinomios de Bernstein. De ahí su utilidad al estudiar las curvas de Bézier, objeto de esta investigación.

⁶ Ya que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los términos de su diagonal. Y, en este caso, como ninguno de los términos de la diagonal secundaria es nulo, el determinante es distinto de cero.

1.2. Las curvas de Bézier

1.2.1. Descripción y construcción de las curvas

Una curva de Bézier⁷ es una línea curva que, pasando por unos puntos fijos arbitrarios del plano, P_0 y P_n , llamados nodos, adopta una forma y curvatura en función de otros puntos invisibles en el dibujo, P_1, \dots, P_{n-1} , denominados puntos de control.

Una curva de Bézier de grado n , definida por $n + 1$ puntos, tiene por fórmula paramétrica⁸:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i, \quad t \in [0, 1]$$

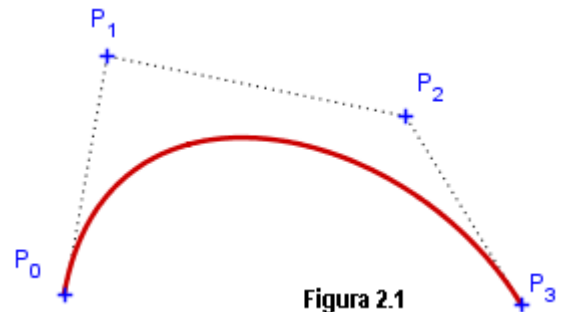


Figura 2.1

El grado de las curvas de Bézier viene dado, entonces, por el número de puntos de control, P_1, \dots, P_{n-1} , de los que depende la curva.

De esta manera, se pueden estudiar los distintos casos que se presentan:

Curva lineal de Bézier

Únicamente dados dos puntos, P_0 y P_1 , una curva lineal de Bézier es una recta que une los dos puntos.

Su expresión analítica⁹ es:

$$B(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1 = P_0 + (P_1 - P_0) \cdot t, \quad t \in [0, 1]$$

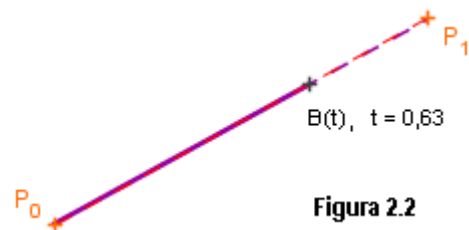


Figura 2.2

⁷ Pierre Étienne Bézier (1910 – 1999) fue un célebre ingeniero parisino, doctorado en matemáticas, que a los veintitrés años de edad comenzó a trabajar para la fábrica automovilística Renault. Desarrolló uno de los primeros programas de diseño asistido por ordenador, en el que introdujo un sistema de ecuaciones simples que permiten dibujar muy fácilmente un número infinito de diferentes curvas.

⁸ O, en función de los polinomios de Bernstein estudiados en el apartado anterior,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1]$$

⁹ El parámetro t en las curvas de Bézier se refiere al *tiempo* necesario para recorrer la distancia entre los nodos; es decir, es un descriptor de cuán lejos está $B(t)$ de P_0 a P_n . (Véase figura 2.2)

Cuando el parámetro $t = 0$, entonces $B(t) = P_0$. Al contrario, si $t = 1$, entonces $B(t) = P_1$.

Curva cuadrática de Bézier

Dados tres puntos del plano, P_0 , P_1 y P_2 , una curva cuadrática de Bézier es el lugar geométrico definido por la ecuación:

$$B(t) = (1 - t)^2 \cdot P_0 + 2t(1 - t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2 \quad , \quad t \in [0, 1]$$

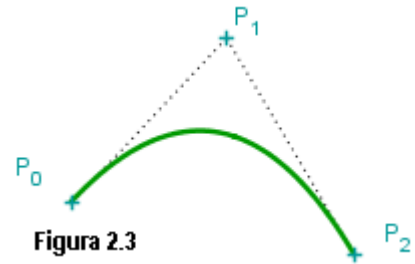


Figura 2.3

Curva cúbica de Bézier

Análogamente, cuatro puntos del plano, P_0 , P_1 , P_2 y P_3 definen una curva cúbica de Bézier, de fórmula paramétrica:

$$B(t) = (1 - t)^3 \cdot P_0 + 3t(1 - t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1 - t) \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3 \quad , \quad t \in [0, 1]$$

1.2.2. Propiedades de las curvas de Bézier

- Las curvas de Bézier tienen control global: al modificar un solo punto de control de la curva, cambia totalmente la forma de ésta.

Si el punto P_j pasa a ser el punto P'_j , de manera que $P'_j = P_j + Q$, entonces la nueva curva será

$$C(t) = B(t) + Q \cdot b_j^n(t)$$

siendo $B(t)$ la curva inicial y $b_j^n(t)$ un polinomio de Bernstein:

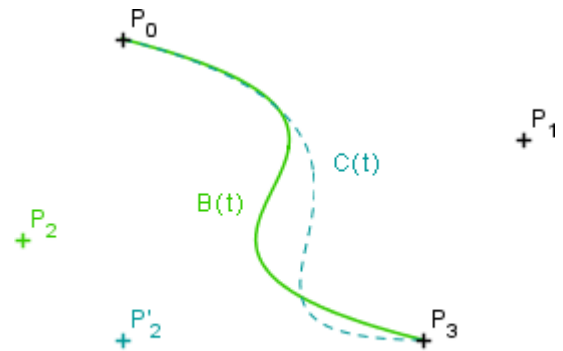


Figura 2.4

$$C(t) = B(t) + Q \cdot b_j^n(t)$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n b_i^n(t) P_i + Q \cdot b_j^n(t) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, j, \dots, n - 1, n$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n b_i^n(t) P_i + b_j^n(t) P_j + Q \cdot b_j^n(t) \quad , \quad i = 0, \dots, n \wedge i \neq j \quad \forall j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n b_i^n(t) P_i + b_j^n(t) (P_j + Q) \quad , \quad i = 0, \dots, n \wedge i \neq j \quad \forall j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n b_i^n(t) P_i + b_j^n(t) P'_j \quad , \quad i = 0, \dots, n \wedge i \neq j \quad \forall j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n$$

- La curva es un segmento recto si, y sólo si, todos los puntos de control están alineados.

Siendo una curva de Bézier:
$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i$$

$$B(t) = \binom{n}{0} P_0 (1-t)^n + \binom{n}{1} P_1 (1-t)^{n-1} t + \binom{n}{2} P_2 (1-t)^{n-2} t^2 + \binom{n}{3} P_3 (1-t)^{n-3} t^3 + \dots + \binom{n}{n-2} P_{n-2} (1-t)^2 t^{n-2} + \binom{n}{n-1} P_{n-1} (1-t) t^{n-1} + \binom{n}{n} P_n t^n$$

también se puede escribir como:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i \left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P_k (-1)^{i+k} \right]$$

Por lo tanto,

$$B(t) = \binom{n}{0} P_0 + \binom{n}{1} t (-P_0 + P_1) + \binom{n}{2} t^2 (P_0 - 2P_1 + P_2) + \binom{n}{3} t^3 (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) + \binom{n}{4} t^4 (P_0 - 4P_1 + 6P_2 - 4P_3 + P_4) + \dots$$

La fórmula paramétrica de una recta es: $R(\lambda) = P_0 + (P_1 - P_0) \cdot \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Pero una función paramétrica de la forma:

$$f(\tau) = P_0 + (P_1 - P_0) \cdot \tau + (P_0 - 2P_1 + P_2) \cdot \tau^2 + (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) \cdot \tau^3 + \dots, \tau \in \mathbb{R}$$

también responderá a la ecuación de una recta si, y solo si, los coeficientes del parámetro elevado a sucesivas potencias son proporcionales. Aquí, si son todos los coeficientes proporcionales a $(P_1 - P_0)$.

Así, partiendo de la premisa de que todos los nodos y puntos de control de la curva de Bézier están alineados¹⁰, se puede comprobar sin demasiado esfuerzo que:

$$\begin{aligned} * (P_0 - 2P_1 + P_2) &= P_2 - P_1 + P_0 - P_1 = (P_2 - P_1) - (-P_0 + P_1) = \\ &= \alpha(-P_0 + P_1) - (-P_0 + P_1) = (\alpha - 1)(-P_0 + P_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) &= -P_0 + 3(P_1 - P_2) + P_3 = (P_3 - P_0) - 3(P_2 - P_1) = \\ &= \beta(-P_0 + P_1) - 3\alpha(-P_0 + P_1) = (\beta - 3\alpha)(-P_0 + P_1) \end{aligned}$$

* y sucesivamente ...

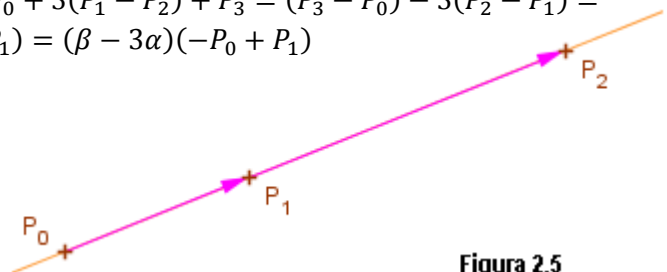


Figura 2.5

¹⁰ Al estar todos los puntos, P_0, \dots, P_n , alineados, la dirección de la recta que pasa por dos puntos cualesquiera de ellos será siempre la misma. Es decir, $P_1 - P_0 = \alpha(P_2 - P_1) = \beta(P_3 - P_2) = \dots = \omega(P_n - P_{n-1})$. Y, en general, $P_1 - P_0 = \lambda(P_i - P_j)$, $i \neq j$

Es decir, que una curva de Bézier cuyos puntos están alineados también se puede enunciar con la expresión:

$$B(t) = \binom{n}{0} P_0 + \binom{n}{1} t (-P_0 + P_1) + \binom{n}{2} t^2 (\alpha - 1)(-P_0 + P_1) + \binom{n}{3} t^3 (\beta - 3\alpha)(-P_0 + P_1) + \dots$$

$$B(t) = \binom{n}{0} P_0 + \left(\binom{n}{1} t + \binom{n}{2} t^2 (\alpha - 1) + \binom{n}{3} t^3 (\beta - 3\alpha) + \dots \right) (-P_0 + P_1)$$

$$B(Y) = P_0 + Y \cdot (-P_0 + P_1) \quad \text{que, efectivamente, responde a la fórmula de una recta.}$$

Cabe destacar el caso particular en el que la curva de Bézier, de fórmula:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i \left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P_k (-1)^{i+k} \right]$$

$$B(t) = \binom{n}{0} P_0 + \binom{n}{1} t (-P_0 + P_1) + \binom{n}{2} t^2 (P_0 - 2P_1 + P_2) +$$

$$+ \binom{n}{3} t^3 (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) + \binom{n}{4} t^4 (P_0 - 4P_1 + 6P_2 - 4P_3 + P_4) + \dots$$

puede reducirse a la recta: $B(t) = \binom{n}{0} P_0 + \binom{n}{1} t (-P_0 + P_1)$

Al anular todos los coeficientes de las potencias del parámetro, t^i , para $i \geq 2$:

$$\left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P_k (-1)^{i+k} \right] = 0, \quad i \geq 2$$

los puntos de la curva, además de estar alineados, equidistarán cada uno del anterior y del siguiente:

- * $(P_0 - 2P_1 + P_2) = 0$, $P_2 - P_1 = P_1 - P_0$, $P_1 = (P_0 + P_2)/2$
- * $(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) = 0$, $P_3 - P_2 = -(P_1 - P_0) + 2(P_2 - P_1)$,
 $P_3 - P_2 = P_2 - P_1$, $P_2 = (P_1 + P_3)/2$
- * $(P_0 - 4P_1 + 6P_2 - 4P_3 + P_4) = 0$, $P_4 - P_3 = (P_1 - P_0) - 3(P_2 - P_1) + 3(P_3 - P_2)$,
 $P_4 - P_3 = P_3 - P_2$, $P_3 = (P_2 + P_4)/2$
- * y sucesivamente ...

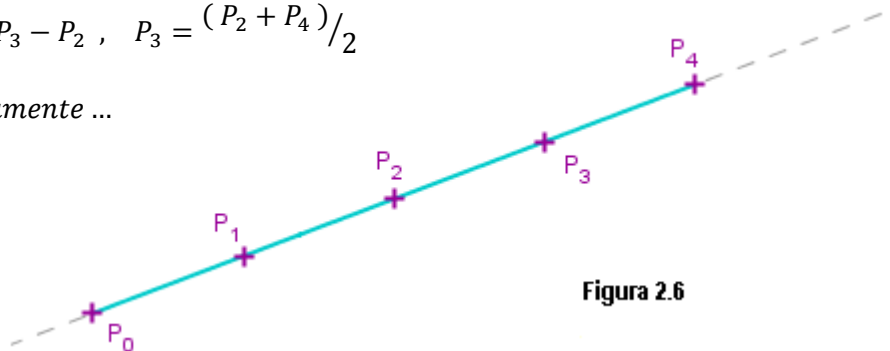


Figura 2.6

- La derivada de una curva de Bézier es también una curva de Bézier de grado una unidad menos.

Siendo una curva de Bézier:
$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i$$

$$B(t) = \binom{n}{0} P_0 (1-t)^n + \binom{n}{1} P_1 (1-t)^{n-1} t + \binom{n}{2} P_2 (1-t)^{n-2} t^2 + \binom{n}{3} P_3 (1-t)^{n-3} t^3 + \dots + \binom{n}{n-2} P_{n-2} (1-t)^2 t^{n-2} + \binom{n}{n-1} P_{n-1} (1-t) t^{n-1} + \binom{n}{n} P_n t^n$$

Su derivada será:

$$B'(t) = \binom{n}{0} P_0 n (1-t)^{n-1} (-1) + \binom{n}{1} P_1 [(n-1)(1-t)^{n-2} (-1) t + (1-t)^{n-1}] + \binom{n}{2} P_2 [(n-2)(1-t)^{n-3} (-1) t^2 + (1-t)^{n-2} 2t] + \binom{n}{3} P_3 [(n-3)(1-t)^{n-4} (-1) t^3 + (1-t)^{n-3} 3t^2] + \dots + \binom{n}{n-2} P_{n-2} [2(1-t) (-1) t^{n-2} + (1-t)^2 (n-2) t^{n-3}] + \binom{n}{n-1} P_{n-1} [(-1) t^{n-1} + (1-t)(n-1) t^{n-2}] + \binom{n}{n} P_n n t^{n-1}$$

Y, reagrupando por sumandos de la forma de los de las curvas de Bézier:

$$B'(t) = (1-t)^{n-1} \left[-\binom{n}{0} n P_0 + \binom{n}{1} P_1 \right] + (1-t)^{n-2} t \left[-\binom{n}{1} (n-1) P_1 + \binom{n}{2} 2 P_2 \right] + (1-t)^{n-3} t^2 \left[-\binom{n}{2} (n-2) P_2 + \binom{n}{3} 3 P_3 \right] + \dots + (1-t)^2 t^{n-3} \left[-\binom{n}{n-3} 3 P_{n-3} + \binom{n}{n-2} (n-2) P_{n-2} \right] + (1-t) t^{n-2} \left[-\binom{n}{n-2} 2 P_{n-2} + \binom{n}{n-1} (n-1) P_{n-1} \right] + t^{n-1} \left[-\binom{n}{n-1} P_{n-1} + \binom{n}{n} n P_n \right]$$

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)^{n-1-i} t^i \left[-\binom{n}{i} (n-1) P_i + \binom{n}{i+1} (i+1) P_{i+1} \right]$$

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)^{n-1-i} t^i \left[-\left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) (n-1) P_i + \left(\frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} \right) (i+1) P_{i+1} \right]$$

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)^{n-1-i} t^i \left(\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} \right) \left[-\left(\frac{n}{n-i} \right) (n-1) P_i + \left(\frac{n}{i+1} \right) (i+1) P_{i+1} \right]$$

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-1-i} t^i [-n P_i + n P_{i+1}]$$

Por lo que la derivada de la curva de Bézier inicial, de fórmula

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P'_i (1-t)^{n-1-i} t^i$$

es otra curva de Bézier, cuyos puntos P'_i se relacionan con los puntos de la curva inicial de la forma: $P'_i = (-n P_i + n P_{i+1})$

- La tangente en los extremos de una curva de Bézier es la recta que une sus nodos con los puntos de control siguientes. Es decir, que la tangente en P_0 es la recta $\overline{P_0 P_1}$, y la tangente en P_n es la recta $\overline{P_{n-1} P_n}$.

Conociendo la derivada de una curva de Bézier enésima:

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-1-i} t^i [-n P_i + n P_{i+1}]$$

$$B'(t) = \binom{n-1}{0} (1-t)^{n-1} [-n P_0 + n P_1] + \binom{n-1}{1} (1-t)^{n-2} t [-n P_1 + n P_2] + \\ + \binom{n-1}{2} (1-t)^{n-3} t^2 [-n P_2 + n P_3] + \dots + \binom{n}{n-3} (1-t)^2 t^{n-3} [-n P_{n-3} + n P_{n-2}] + \\ + \binom{n}{n-2} (1-t) t^{n-2} [-n P_{n-2} + n P_{n-1}] + \binom{n}{n-1} t^{n-1} [-n P_{n-1} + n P_n]$$

se puede calcular las rectas que unen el primer con el segundo punto y el último con el anterior y comprobar que coinciden con las tangentes en los nodos de la curva.

$$\text{recta } \overline{P_0 P_1} \equiv \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$\text{recta } \overline{P_0 P_1} \equiv y = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) x - \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) x_0 + y_0$$

$$\text{recta } \overline{P_{n-1} P_n} \equiv \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

$$\text{recta } \overline{P_{n-1} P_n} \equiv y = \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right) x - \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right) x_{n-1} + y_{n-1}$$

Siendo una curva de Bézier:
$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i$$

El valor del parámetro en los puntos de tangencia, P_0 y P_n , es respectivamente $t = 0$ y $t = 1$ por la propia definición de las curvas de Bézier¹¹.

Y, al sustituir en la expresión de la derivada $t = 0$ y $t = 1$, nos dará la pendiente de la recta tangente en P_0 y P_n respectivamente.

$$B'(0) = n \cdot P_1 - n \cdot P_0 = n \cdot (P_1 - P_0) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{n \cdot (y_1 - y_0)}{n \cdot (x_1 - x_0)} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$B'(1) = n \cdot (n \cdot P_n - n \cdot P_{n-1}) = n^2 \cdot (P_n - P_{n-1}) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{n^2 \cdot (y_n - y_{n-1})}{n^2 \cdot (x_n - x_{n-1})} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Entonces, se verifica la propiedad.

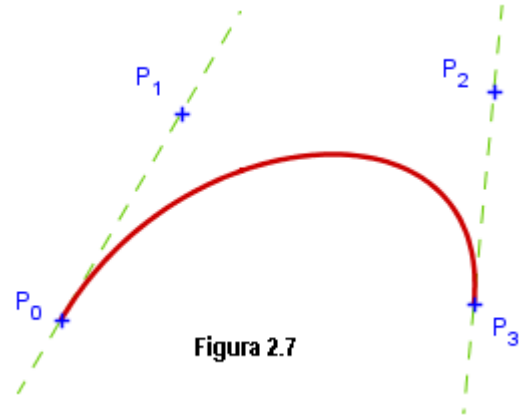


Figura 2.7

¹¹ Véase referencia en nota al pie 9.

1.2.3. Desventajas de las curvas de Bézier

Sin embargo, a pesar de todas las facilidades que proporcionan las curvas de Bézier en cuanto a la sencillez en su manejo, cuando el número de puntos de control que se requieren es muy elevado se comienzan a presentar los inconvenientes.

El grado de la base muy alto dificulta los procedimientos, tanto analíticos como gráficos, y el control global provoca que el desplazamiento de un sólo punto de control modifique a toda la curva. Además, la curva es prácticamente insensible a pequeños cambios locales.

Entonces surge el concepto de *spline* o curva definida a trozos. La curva completa resultante es un enlace de segmentos de curva que se unen en los nodos.

Así, el grado de la curva se puede escoger previamente y los puntos de control pasan a tener un carácter local.



Figura 2.8

Pero en los *splines* de Bézier también se debe tener en cuenta el tipo de unión que se da entre los trozos de curva. Estos problemas de continuidad se pueden resolver, entre otras, de cuatro formas distintas:

- Continuidad C^0 : basta con que el último nodo de una curva sea el mismo que el primero de la siguiente. Provoca uniones bruscas y con picos. (Figura 2.8)
- Continuidad C^1 : en este caso no sólo deben coincidir los puntos de los extremos, sino también sus derivadas laterales. Genera uniones suaves. (Figura 2.9)

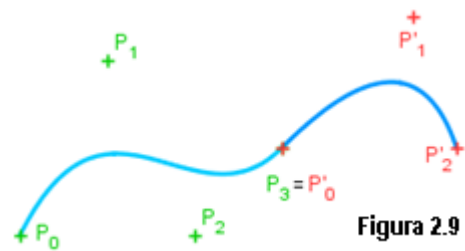


Figura 2.9

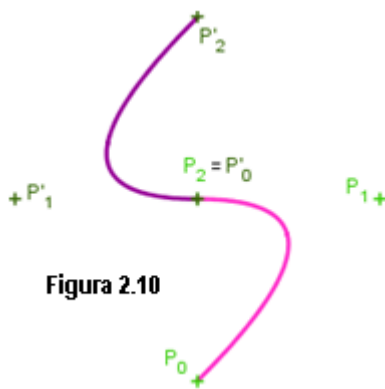


Figura 2.10

- Continuidad C^2 : igual que la segunda, pero deben coincidir también las derivadas segundas. Facilita los cambios de curvatura. (Figura 2.10)

- Continuidad G^1 : no es estrictamente necesario que las derivadas coincidan, pero sí que los vectores tangentes en los extremos sean proporcionales. (Figura 2.11)

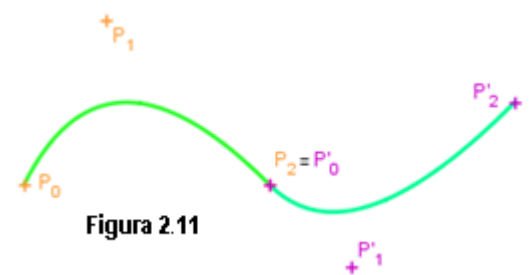


Figura 2.11

Aun así, cuando el número de divisiones es muy grande, el proceso resulta muy laborioso. Aparece por lo tanto una modificación de los *splines* de Bézier: los *Basis Splines*¹², que posibilitan definir de una sola vez todos los trozos y conocer el tipo de unión en los nodos.

¹² De aquí en adelante, *B-Splines*.

1.3. Introducción a los Basis-Splines

Los *B-Splines*¹³ son, al igual que las curvas de Bézier, un tipo de curvas paramétricas. Pero que, a diferencia de las anteriores, están formadas a su vez por tramos de curvas más cortas.

Es decir, los *B-Splines* son curvas a trozos que, estableciendo los nodos de unión entre esos tramos y sus puntos de control (análogos a los de las curvas de Bézier), se adecúan fácilmente a cualquier forma que se desee diseñar gráficamente.

Debido a los límites en la extensión de esta monografía, no se desarrollarán estas curvas con la misma profundidad que se han estudiado las anteriores. Se adjunta un apéndice en el que se desarrolla su análisis brevemente.

1.3.1. Definición de los B-Splines

Al tratarse de una extensión de las curvas de Bézier, los *B-Splines* presentan una fórmula semejante. La expresión¹⁴ de estas curvas es:

$$S(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) P_i \quad , \quad t \in [x_k, x_{n+1}]$$

siendo k el orden de la curva; $P_i \in \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$, sus puntos de control¹⁵; y $N_i^k(t)$, las funciones de base anteriormente definidas.

Estas curvas, como ya se ha explicado, están formadas por trozos de polinomio, de grado el orden de la curva, k ; y los nodos de unión entre dichos tramos estarán definidos por el vector:

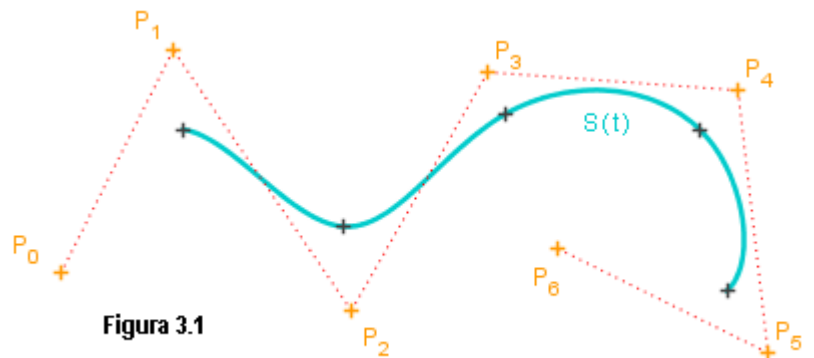


Figura 3.1

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+k+1}] \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \leq x_{i+1}$$

¹³ Isaac Jacob Schoenberg, matemático rumano, fue quien introdujo el concepto de *B-Splines* para este tipo de funciones.

¹⁴ Nótese que en los *B-Splines* se sustituyen los polinomios de Bernstein, b_i^n , de las curvas de Bézier por funciones de base, N_i^k .

¹⁵ Siendo $n \geq k$.

2. Aplicaciones

Tras un breve pero profundo estudio de las curvas de Bézier, los *B-Splines* y las correspondientes funciones que los forman, podemos abordar situaciones cotidianas que, aunque no a simple vista, necesitan de esta rama de las matemáticas.

Como ya se ha indicado con anterioridad, la geometría analítica, y particularmente nuestros objetos de estudio, son fundamentales en el diseño gráfico digital.

Desde carreteras hasta los dibujos animados más complicados, nuestras curvas pueden trazar, con relativa facilidad, infinidad de recorridos.

Pero no adelantemos acontecimientos: vamos a realizar un desarrollo pseudo-histórico (o, por lo menos, de menor a mayor grado de abstracción y dificultad) de los proyectos y planes de dibujos.

2.1. Situaciones a modelar

2.1.1. Carreteras

Muchas veces se ha tenido que comunicar una población con una carretera cercana. Además, para ahorrar recursos, se querría que la nueva ruta pasase por una casa aislada de mitad del camino:



Puede también que nos convenga que la carretera siga las fronteras de los terrenos para evitar disputas...

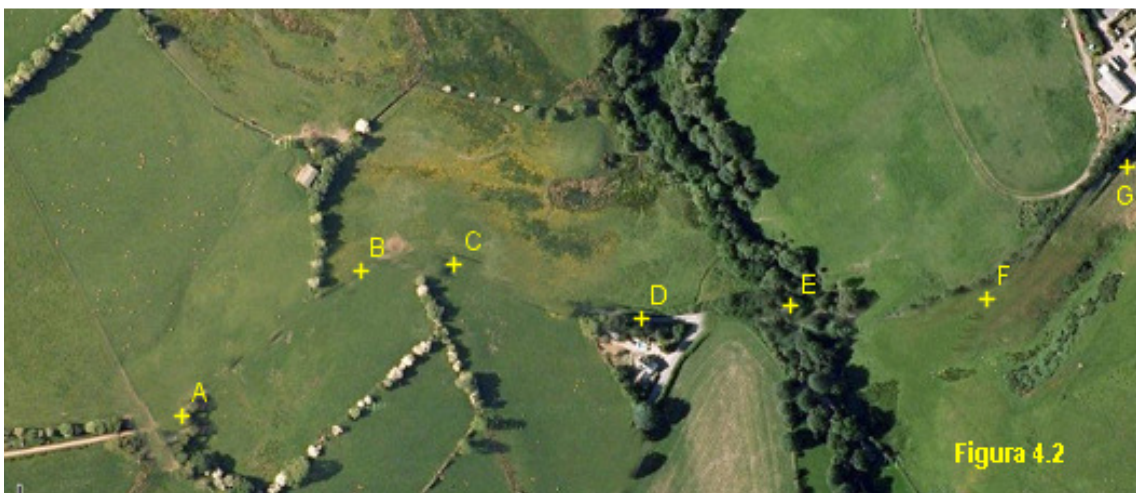
El problema es una sencilla aplicación de la ingeniería: si trasladamos el plano a un sistema de coordenadas, la carretera será una función definida a trozos o *spline*. Pero de entre todos los tipos de *splines* (*splines* lineales, *splines* cuadráticos, *splines* cúbicos...) sólo unos nos interesan.

Lo primero que hay que tener en cuenta es que la carretera no solamente tiene que ser continua, sino que además no debe tener cambios bruscos de dirección. Esto, en términos de funciones¹⁶, se traduce como que debe existir, al menos, una continuidad C^1 entre los tramos de las funciones.

En cambio, no basta con este tipo de unión. Cuando se viaja a gran velocidad, es peligroso dar volantazos: el volante tiene que girar lentamente. Es decir, la curvatura de la trayectoria debe cambiar paulatinamente: la continuidad debe ser de tipo C^2 .

Gracias a estas condiciones, ya tenemos definido el problema:

Eligiendo arbitrariamente los puntos por los que queremos que pase el camino, hallamos funciones cúbicas de forma que por cada par de puntos consecutivos pase una función, y que las primera y segunda derivadas de ésta coincidan con las de la función siguiente.



$A(0; 0)$	$E(11,54; 2,06)$
$B(3,38; 2,73)$	$F(15,27; 2,2)$
$C(5,15; 2,87)$	$G(17,92; 4,71)$
$D(8,7; 1,83)$	

$$f(x) \begin{cases} P_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x \in [0; 3,38] \\ P_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & x \in [3,38; 5,15] \\ P_3(x) = Ix^3 + Jx^2 + Kx + L & x \in [5,15; 8,7] \\ P_4(x) = Mx^3 + Nx^2 + Ox + P & x \in [8,7; 11,54] \\ P_5(x) = Qx^3 + Rx^2 + Sx + T & x \in [11,54; 15,27] \\ P_6(x) = Ux^3 + Vx^2 + Wx + X & x \in [15,27; 17,92] \end{cases}$$

¹⁶ Utilizando los conceptos explicados en el apartado que versa sobre las desventajas de las curvas de Bézier.

Nótese que, cuantos más puntos se tomen, más definido estará el trayecto inicialmente, y, por ello, más se ajustará al deseado.

- La función pasa por los puntos dados:

$$P_1(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$P_1(3,38) = 2,73 \Rightarrow 38,61 \cdot A + 11,42 \cdot B + 3,38 \cdot C + D = 2,73$$

$$P_2(3,38) = 2,73 \Rightarrow 38,61 \cdot E + 11,42 \cdot F + 3,38 \cdot G + H = 2,73$$

$$P_2(5,15) = 2,87 \Rightarrow 136,59 \cdot E + 26,52 \cdot F + 5,15 \cdot G + H = 2,87$$

$$P_3(5,15) = 2,87 \Rightarrow 136,59 \cdot I + 26,52 \cdot J + 5,15 \cdot K + L = 2,87$$

$$P_3(8,7) = 1,83 \Rightarrow 658,50 \cdot I + 75,69 \cdot J + 8,7 \cdot K + L = 1,83$$

$$P_4(8,7) = 1,83 \Rightarrow 658,50 \cdot M + 75,69 \cdot N + 8,7 \cdot O + P = 1,83$$

$$P_4(11,54) = 2,06 \Rightarrow 1536,80 \cdot M + 133,17 \cdot N + 11,54 \cdot O + P = 2,06$$

$$P_5(11,54) = 2,06 \Rightarrow 1536,80 \cdot Q + 133,17 \cdot R + 11,54 \cdot S + T = 2,06$$

$$P_5(15,27) = 2,2 \Rightarrow 3560,55 \cdot Q + 233,17 \cdot R + 15,27 \cdot S + T = 2,2$$

$$P_6(15,27) = 2,2 \Rightarrow 3560,55 \cdot U + 233,17 \cdot V + 15,27 \cdot W + X = 2,2$$

$$P_6(17,92) = 4,71 \Rightarrow 5754,59 \cdot U + 321,13 \cdot V + 17,92 \cdot W + X = 4,71$$

- La función debe ser dos veces derivable en las uniones:

$$P'_1(3,38) = P'_2(3,38) \Rightarrow 34,27 \cdot A + 6,76 \cdot B + C = 34,27 \cdot E + 6,76 \cdot F + G$$

$$P''_1(3,38) = P''_2(3,38) \Rightarrow 20,28 \cdot A + 2 \cdot B = 20,28 \cdot E + 2 \cdot F$$

$$P'_2(5,15) = P'_3(5,15) \Rightarrow 79,57 \cdot E + 10,3 \cdot F + G = 79,57 \cdot I + 10,3 \cdot J + K$$

$$P''_2(5,15) = P''_3(5,15) \Rightarrow 30,9 \cdot E + 2 \cdot F = 30,9 \cdot I + 2 \cdot J$$

$$P'_3(3,38) = P'_4(3,38) \Rightarrow 227,07 \cdot I + 17,4 \cdot J + K = 227,07 \cdot M + 17,4 \cdot N + O$$

$$P''_3(3,38) = P''_4(3,38) \Rightarrow 52,2 \cdot I + 2 \cdot J = 52,2 \cdot M + 2 \cdot N$$

$$P'_4(3,38) = P'_5(3,38) \Rightarrow 399,51 \cdot M + 23,08 \cdot N + O = 399,51 \cdot Q + 23,08 \cdot R + S$$

$$P''_4(3,38) = P''_5(3,38) \Rightarrow 69,24 \cdot M + 2 \cdot N = 69,24 \cdot Q + 2 \cdot R$$

$$P'_5(3,38) = P'_6(3,38) \Rightarrow 699,52 \cdot Q + 30,54 \cdot R + S = 699,52 \cdot U + 30,54 \cdot V + W$$

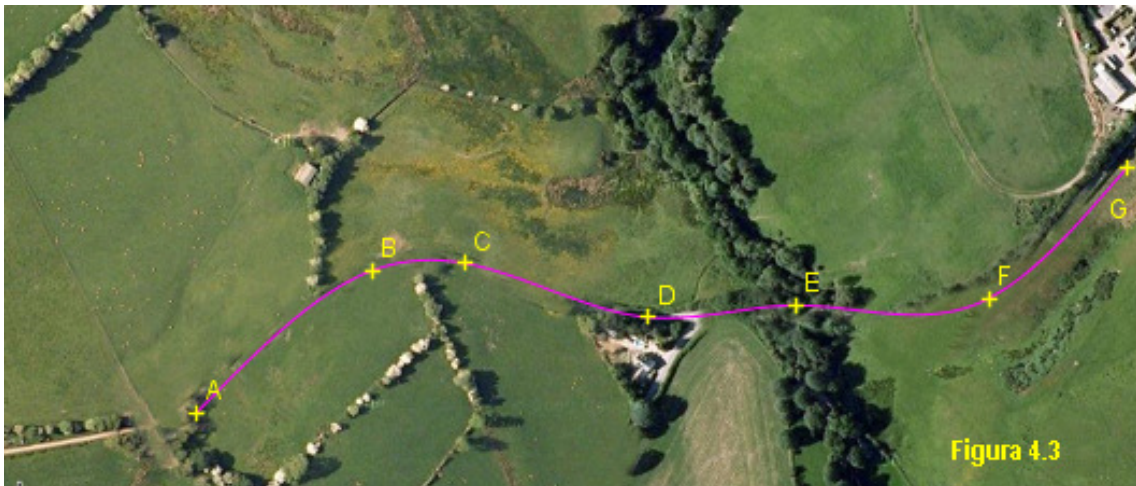
$$P''_5(3,38) = P''_6(3,38) \Rightarrow 91,62 \cdot Q + 2 \cdot R = 91,62 \cdot U + 2 \cdot V$$

- Y, como la función debe enlazar en sus extremos con carreteras rectas, imponemos:

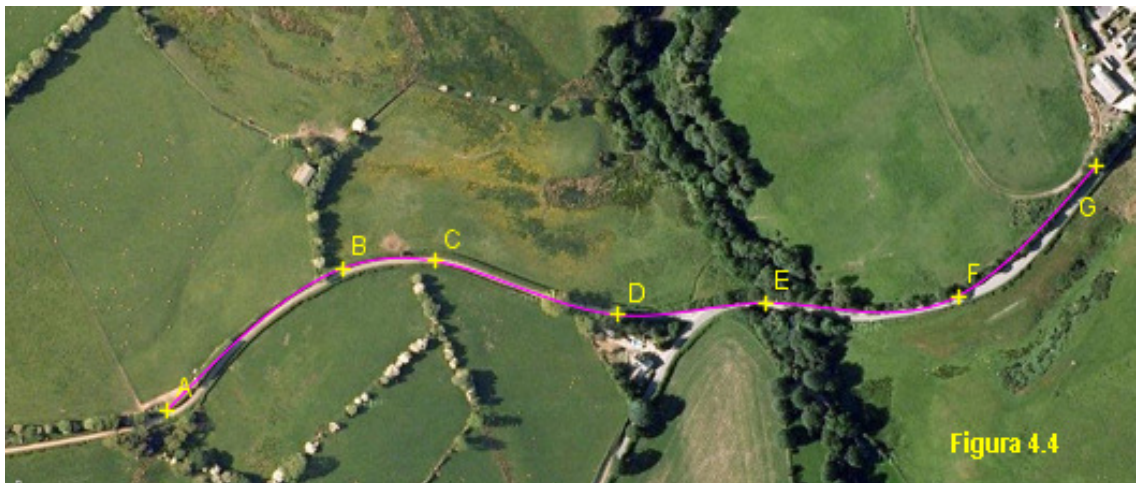
$$P''_1(0) = 0 \Rightarrow 2 \cdot B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$P''_6(17,92) = 0 \Rightarrow 107,52 \cdot U + 2 \cdot V = 0$$

Después de efectuar todas las operaciones algebraicas, y resolver el sistema de 24 ecuaciones y 24 incógnitas¹⁷, representamos las funciones obtenidas:



Sólo queda “rellenar” la carretera con cemento:



¹⁷ Debido a la laboriosidad que supone resolver un sistema de tal número de incógnitas, se ha recurrido al programa informático *Derive*, software de cálculo matemático avanzado.

Pero los tiempos cambian, y los avances introducidos en torno a los años sesenta por Pierre Bézier revolucionaron el diseño.

Aunque el método tradicional anterior continúa siendo válido, las curvas de Bézier allanan notablemente el camino.

Si se sigue el procedimiento anterior para el trazado de otra carretera (figura 4.5), entonces:

$$\begin{array}{ll} A(0; 0) & D(7,92; -0,42) \\ B(2,46; 0,56) & E(9,32; 0,56) \\ C(6,38; -0,58) & \end{array}$$

$$g(x) \begin{cases} P_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x \in [0; 3,38] \\ P_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & x \in [3,38; 5,15] \\ P_3(x) = Ix^3 + Jx^2 + Kx + L & x \in [5,15; 8,7] \\ P_4(x) = Mx^3 + Nx^2 + Ox + P & x \in [8,7; 11,54] \end{cases}$$

- La función pasa por los puntos dados:

$$P_1(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$P_1(2,46) = 0,56 \Rightarrow 14,89 \cdot A + 6,05 \cdot B + 2,46 \cdot C + D = 0,56$$

$$P_2(2,46) = 0,56 \Rightarrow 14,89 \cdot E + 6,05 \cdot F + 2,46 \cdot G + H = 0,56$$

$$P_2(6,38) = -0,58 \Rightarrow 259,69 \cdot E + 40,70 \cdot F + 6,38 \cdot G + H = -0,58$$

$$P_3(6,38) = -0,58 \Rightarrow 259,69 \cdot I + 40,70 \cdot J + 6,38 \cdot K + L = -0,58$$

$$P_3(7,92) = -0,42 \Rightarrow 496,79 \cdot I + 62,73 \cdot J + 7,92 \cdot K + L = -0,42$$

$$P_4(7,92) = -0,42 \Rightarrow 496,76 \cdot M + 62,73 \cdot N + 7,92 \cdot O + P = -0,42$$

$$P_4(9,32) = 0,56 \Rightarrow 809,56 \cdot M + 86,86 \cdot N + 9,32 \cdot O + P = 0,56$$

- La función debe ser dos veces derivable en las uniones:

$$P'_1(2,46) = P'_2(2,46) \Rightarrow 18,15 \cdot A + 4,92 \cdot B + C = 18,15 \cdot E + 4,92 \cdot F + G$$

$$P''_1(2,46) = P''_2(2,46) \Rightarrow 14,76 \cdot A + 2 \cdot B = 14,76 \cdot E + 2 \cdot F$$

$$P'_2(6,38) = P'_3(6,38) \Rightarrow 122,11 \cdot E + 12,76 \cdot F + G = 122,11 \cdot I + 12,76 \cdot J + K$$

$$P''_2(6,38) = P''_3(6,38) \Rightarrow 38,28 \cdot E + 2 \cdot F = 38,28 \cdot I + 2 \cdot J$$

$$P'_3(7,92) = P'_4(7,92) \Rightarrow 188,18 \cdot I + 15,84 \cdot J + K = 188,18 \cdot M + 15,84 \cdot N + O$$

$$P''_3(7,92) = P''_4(7,92) \Rightarrow 47,52 \cdot I + 2 \cdot J = 47,52 \cdot M + 2 \cdot N$$

- Y, debido a la forma de la función, imponemos el *spline* sea periódico:

$$P'_1(0) = P'_4(9,32) \Rightarrow C = 260,59 \cdot M + 18,64 \cdot N + O$$

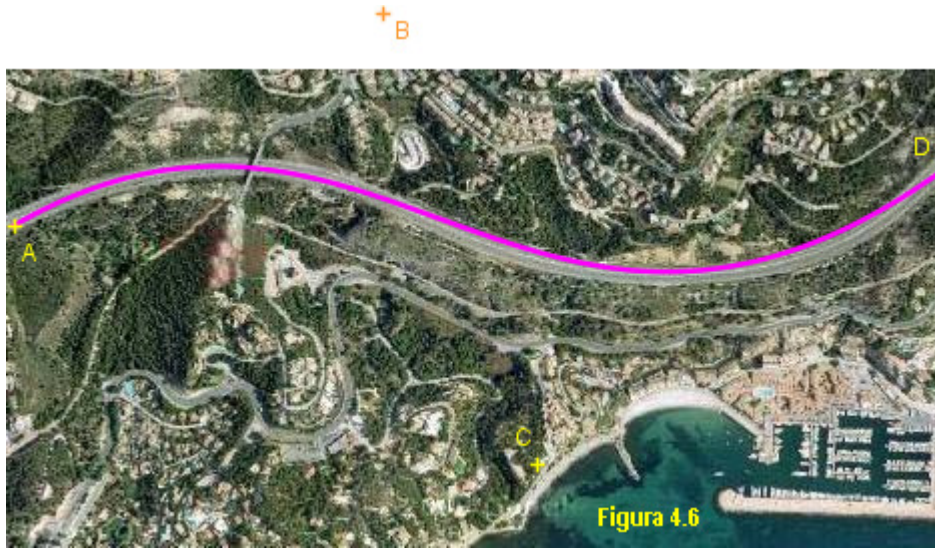
$$P''_1(0) = P''_4(9,32) \Rightarrow 2 \cdot B = 55,92 \cdot M + 2 \cdot N$$

Resolviendo el sistema, y representado la función:

$$g(x) \begin{cases} P_1(x) = 0.01380903280x^3 - 0.2141343937x^2 + 0.6706896682x & x \in [0; 3,38] \\ P_2(x) = 0.01829232710x^3 - 0.2472211056x^2 + 0.7521044993x - 0.06686212958 & x \in [3,38; 5,15] \\ P_3(x) = 0.04994068689x^3 - 0.8529707121x^2 + 4.616888263x - 8.288936115 & x \in [5,15; 8,7] \\ P_4(x) = -0.1304177148x^3 + 3.432344912x^2 - 29.32266719x + 81.29474438 & x \in [8,7; 11,54] \end{cases}$$



Mientras que, si conociendo la trayectoria, obligamos a una curva de Bézier a satisfacerla, resulta:



$$\begin{array}{ll} A(-3,54; -0,5) & C(1,68; -2,88) \\ B(0,14; 1,62) & D(5,78; 0,08) \end{array}$$

$$B(t) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} P_i (1-t)^{3-i} t^i, \quad t \in [0,1]$$

$$B(t) \begin{cases} x(t) = \binom{3}{0} (1-t)^3 (-3,54) + \binom{3}{1} t(1-t)^2 (0,14) + \binom{3}{2} t^2(1-t)(1,68) + \binom{3}{3} t^3(5,78) \\ y(t) = \binom{3}{0} (1-t)^3 (-0,5) + \binom{3}{1} t(1-t)^2 (1,62) + \binom{3}{2} t^2(1-t)(-2,88) + \binom{3}{3} t^3(0,08) \end{cases}$$

$$B(t) \begin{cases} x(t) = 4,7t^3 - 6,42t^2 + 11,04t - 3,54 \\ y(t) = 14,08t^3 - 19,86t^2 + 6,36t - 0,5 \end{cases}$$

Una sola curva de Bézier es capaz de definir la carretera. Sin embargo, también se pueden utilizar, para situaciones más complicadas, *splines* de Bézier, tal y como se explicó en el apartado correspondiente.

2.1.2. Caracteres tipográficos

Cuando surgen estas curvas, se descubre un nuevo mundo de posibilidades. Su cómputo es tan sencillo que se introducen sin dilación en campos hoy tan ordinarios como las tipografías informáticas.

Si eliges cualquier letra, bien sencilla o bien de las más complicadas, ésta responderá a una curva de Bézier. O, en su defecto, a un *spline* de Bézier.

Este es el caso de caracteres tan curiosos como:



Que, efectivamente, pueden ser diseñados con curvas de Bézier:

Tomando los puntos adecuados en primer lugar en la letra *C* se puede trazar el primer tramo de la letra:

$$P_1(1,70 ; 2,72) \quad P_2(0,80 ; 2,64)$$

$$P_3(1,34 ; 2,01) \quad P_4(2,03 ; 2,56)$$

$$B_1(t) \begin{cases} x(t) = -1,29t^3 + 4,32t^2 - 2,7t + 1,7 \\ y(t) = 1,73t^3 - 1,65t^2 - 0,24t + 2,72 \end{cases}$$



Si derivamos esta curva de Bézier con el fin de conseguir una continuidad G^1 con el siguiente tramo¹⁸, obtendremos los tres siguientes puntos:

$$P_5(2,34 ; 2,81) \quad P_6(1,8 ; 2,88) \quad P_7(1,39 ; 2,22)$$

Y con ellos calcular:

$$B_2(t) \begin{cases} x(t) = 0,98t^3 - 2,55t^2 + 0,93t + 2,03 \\ y(t) = -0,58t^3 - 0,48t^2 + 0,72t + 2,56 \end{cases}$$

Siguiendo el mismo proceso, los puntos y las curvas que completarán la letra tipográfica serán:

$$P_8(1,21 ; 1,79)$$

$$P_9(1,72 ; 1,88)$$

$$P_{10}(1,74 ; 2,13)$$

$$P_{11}(1,80 ; 2,42)$$

$$P_{12}(1,52 ; 2,23)$$

$$P_{13}(1,52 ; 2,20)$$

$$B_3(t) \begin{cases} x(t) = -1,18t^3 + 2,07t^2 - 0,54t + 1,39 \\ y(t) = -0,36t^3 + 1,56t^2 - 1,29t + 2,22 \end{cases}$$

$$B_4(t) \begin{cases} x(t) = 0,62t^3 - 1,02t^2 + 0,18t + 1,74 \\ y(t) = 0,64t^3 - 1,44t^2 + 0,87t + 2,13 \end{cases}$$

¹⁸ Se debe tener en cuenta que la continuidad que buscamos es del tipo G^1 ya que no sólo buscamos una unión suave, sino también que las curvas se adapten a una forma previamente determinada.

Para diseñar la otra letra, la *G*, el procedimiento es el mismo. De manera directa y resumida, los puntos:

$$\begin{array}{llll}
 P_1(3,34 ; 5,22) & P_2(2,36 ; 5,08) & P_3(2,50 ; 4,44) & P_4(3,00 ; 4,54) \\
 P_5(3,40 ; 4,54) & P_6(4,90 ; 5,40) & P_7(3,72 ; 5,12) & \\
 P_8(2,54 ; 4,84) & P_9(2,57 ; 3,60) & P_{10}(3,64 ; 4,42) & \\
 P_{11}(3,26 ; 3,88) & P_{12}(2,76 ; 3,72) & P_{13}(2,72 ; 4,06) &
 \end{array}$$




dan lugar a las curvas que diseñan la *G*:

$$\begin{array}{ll}
 C_1(t) \begin{cases} x(t) = -0,76t^3 + 3,36t^2 - 2,94t + 3,34 \\ y(t) = 1,24t^3 - 1,5t^2 - 0,42t + 5,22 \end{cases} & C_3(t) \begin{cases} x(t) = -0,17t^3 + 3,63t^2 - 3,54t + 3,72 \\ y(t) = 3,02t^3 - 2,88t^2 - 0,84t + 5,12 \end{cases} \\
 C_2(t) \begin{cases} x(t) = -3,78t^3 + 3,3t^2 + 1,2t + 3 \\ y(t) = -2t^3 + 2,58t^2 + 4,54 \end{cases} & C_4(t) \begin{cases} x(t) = 0,58t^3 - 0,36t^2 - 1,14t + 3,64 \\ y(t) = 0,12t^3 + 1,14t^2 - 1,02t + 4,42 \end{cases}
 \end{array}$$

Y al igual que todo evoluciona, estas curvas no se quedaron atrás. Al buscar una solución al principal problema de las curvas de Bézier, que su grado aumente con el número de puntos de control, aparecieron los *B-Splines*.

Así, una letra que antes se podía calcular con los puntos:



$$\begin{array}{llll}
 P_1(8,98 ; 6,95) & P_2(8,53 ; 6,20) & P_3(10,16 ; 6,92) & \\
 P_4(9,50 ; 7,53) & P_5(8,54 ; 7,84) & P_6(6,21 ; 6,54) & \\
 P_7(8,87 ; 6,34) & P_8(9,63 ; 6,24) & P_9(9,89 ; 6,72) & \\
 P_{10}(10,07 ; 7,72) & P_{11}(11,00 ; 7,90) & P_{12}(9,00 ; 7,10) & P_{13}(8,60 ; 6,20)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 D_1(t) \begin{cases} x(t) = -4,37t^3 + 6,24t^2 - 1,35t + 8,98 \\ y(t) = -1,58t^3 + 4,41t^2 - 2,25t + 6,95 \end{cases} & D_3(t) \begin{cases} x(t) = 0,42t^3 - 1,5t^2 + 2,28t + 8,87 \\ y(t) = -0,06t^3 + 1,74t^2 - 0,3t + 6,34 \end{cases} \\
 D_2(t) \begin{cases} x(t) = 0,36t^3 + 1,89t^2 - 2,88t + 9,5 \\ y(t) = 2,71t^3 - 4,83t^2 + 0,93t + 7,53 \end{cases} & D_4(t) \begin{cases} x(t) = 4,53t^3 - 8,79t^2 + 2,79t + 10,07 \\ y(t) = 0,88t^3 - 2,94t^2 + 0,54t + 7,72 \end{cases}
 \end{array}$$

Ahora quedaría más fácil con los *B-Splines*¹⁹. Sobre el diseño de la letra S seleccionamos los puntos:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| $P_0(6,68 ; 3,44)$ | $P_1(6,17 ; 2,81)$ | $P_2(7,14 ; 3,23)$ |
| $P_3(6,79 ; 3,95)$ | $P_4(5,76 ; 3,00)$ | $P_5(6,76 ; 2,50)$ |
| $P_6(7,46 ; 4,03)$ | $P_7(7,65 ; 3,74)$ | $P_8(6,28 ; 3,02)$ |
| $P_9(6,13 ; 1,97)$ | | |

Que dan lugar a la curva²⁰:



$$S_1(t) = \sum_{i=0}^9 N_i^2(t) P_i \quad , \quad t \in [2, 10]$$

Con este nuevo método diseñaremos nuestro propio número dos:

Utilizando una herramienta de nuestra propia creación en GeoGebra que dibuja automáticamente *B-Splines*, elegimos la forma que tendrá nuestro número:

Los puntos que obtenemos son:

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| $P_0(6,0 ; 6,0)$ | $P_1(5,0 ; 6,5)$ | $P_2(6,5 ; 7,0)$ |
| $P_3(5,0 ; 5,0)$ | $P_4(5,0 ; 6,0)$ | $P_5(7,5 ; 5,0)$ |



Así, el *B-Spline* con la forma deseada del número dos es:

$$S_2(t) = \sum_{i=0}^5 N_i^2(t) P_i \quad , \quad t \in [2, 6]$$

$$S_2(t) \begin{cases} x(t) \begin{cases} 1,25t^2 - 6t + 12,5 & t \in [2, 3) \\ -1,5t^2 + 10,5t - 12,25 & t \in [3, 4) \\ 0,75t^2 - 7,5t + 23,75 & t \in [4, 5) \\ 1,25t^2 - 12,5t + 36,25 & t \in [5, 6) \end{cases} \\ y(t) \begin{cases} 0,5t + 5,25 & t \in [2, 3) \\ -1,25t^2 + 8t - 6 & t \in [3, 4) \\ 1,5t^2 - 14t + 38 & t \in [4, 5) \\ -t^2 + 11t - 24,5 & t \in [5, 6) \end{cases} \end{cases}$$

¹⁹ Los *B-Splines* que se utilizarán en las aplicaciones de aquí en adelante serán de grado $k = 2$ y con un vector de nodos uniforme con el fin de facilitar las operaciones algebraicas.

²⁰ Omitimos la ecuación de la curva debido a su extensión.

2.1.3. Diseño gráfico

Pero el diseño gráfico no se reduce a diseñar carreteras, puentes o caracteres informáticos. Hoy en día, muchos dibujos utilizan las curvas de nuestro estudio en sus diseños.

Por ejemplo, desde que se abandonó el dibujo manual, las películas de animación han proliferado debido a su menor laboriosidad, pues con una herramienta informática no demasiado compleja se puede dibujar prácticamente cualquier forma y/o ajustar las curvas deseadas a bocetos diseñados previamente.

Pongamos el siguiente dibujo:



Figura 4.7

un rápido esbozo diseñado con *B-Splines* resulta:

Figura 4.8



O el famoso el pingüino de Linux



Figura 4.9



Figura 4.10

El diseño del perro (figura 4.8) está formada por siete *B-Splines* independientes que se acoplan en puntos de unión brusca (continuidad C^1)

En cambio, un total de 30 curvas de Bézier componen la figura 4.10. Entre ellas hay tanto curvas de segundo grado como curvas de tercer grado. El tipo de continuidades es también variado y se ajusta a la forma del pingüino: mientras que en las "comisuras" del pico es suficiente una simple unión C^0 , entre las patas se necesita una junta G^1 .

A continuación se adjuntan las expresiones analíticas a las que responde el modelo como muestra de todo el proceso que reside detrás de los resultados:

$$B_1(t) \begin{cases} x(t) = -15,94t^3 + 24,18t^2 - 4,02t + 2,4 \\ y(t) = -1,8t^3 - 11,7t^2 + 13,44t + 7,02 \end{cases}$$

$$B_2(t) \begin{cases} x(t) = -5,26t^3 + 10,8t^2 - 4,02t + 2,74 \\ y(t) = -2,28t^3 - 1,32t^2 + 5,82t + 6,98 \end{cases}$$

$$B_3(t) \begin{cases} x(t) = -3,6t^3 + 1,44t^2 + 3,9t + 4,26 \\ y(t) = 4,22t^3 - 10,62t^2 + 4,2t + 9,2 \end{cases}$$

$$B_4(t) \begin{cases} x(t) = -0,16t^2 + 1,44t + 3,04 \\ y(t) = -0,26t^2 + 1,16t + 7,2 \end{cases}$$

$$B_5(t) \begin{cases} x(t) = 0,4t^2 + t + 4,32 \\ y(t) = -0,36t^2 - 0,6t + 8,1 \end{cases}$$

$$B_6(t) \begin{cases} x(t) = 0,12t^2 + 1,08t + 3,04 \\ y(t) = 0,1t^2 - 0,56t + 7,2 \end{cases}$$

$$B_7(t) \begin{cases} x(t) = 0,44t^2 + 1,04t + 4,24 \\ y(t) = 0,16t^2 + 0,24t + 6,74 \end{cases}$$

$$B_8(t) \begin{cases} x(t) = 0,2t^2 - 2,32t + 5,42 \\ y(t) = -0,42t^2 + 0,44t + 7,14 \end{cases}$$

$$B_9(t) \begin{cases} x(t) = 0,24t^2 - 2,36t + 5,42 \\ y(t) = 0,82t^2 - 0,8t + 7,14 \end{cases}$$

$$B_{10}(t) \begin{cases} x(t) = -t^3 + 1,32t^2 + 0,06t + 3,44 \\ y(t) = 0,78t^3 - 2,34t^2 + 1,56t + 8,06 \end{cases}$$

$$B_{11}(t) \begin{cases} x(t) = 0,52t^3 - 0,6t^2 - 0,3t + 3,82 \\ y(t) = 0,78t^3 - 0,78t + 8,06 \end{cases}$$

$$B_{12}(t) \begin{cases} x(t) = -0,92t^3 + 1,2t^2 + 0,12t + 4,94 \\ y(t) = 0,92t^3 - 2,58t^2 + 1,68t + 8,04 \end{cases}$$

$$B_{13}(t) \begin{cases} x(t) = 0,68t^3 - 0,84t^2 - 0,24t + 5,34 \\ y(t) = t^3 - 0,3t^2 - 0,72t + 8,06 \end{cases}$$

$$B_{14}(t) \begin{cases} x(t) = -1,1t^2 + 1,48t + 6 \\ y(t) = -0,3t^2 - 1,64t + 7 \end{cases}$$

$$B_{15}(t) \begin{cases} x(t) = 0,58t^2 - 0,92t + 2,74 \\ y(t) = 0,18t^2 - 1,64t + 6,98 \end{cases}$$

$$B_{16}(t) \begin{cases} x(t) = 3,16t^3 - 3,9t^2 + 0,6t + 2,4 \\ y(t) = -1,48t^3 + 0,96t^2 - 1,56t + 7,02 \end{cases}$$

$$B_{17}(t) \begin{cases} x(t) = -2,32t^3 + 3,06t^2 - 0,36t + 6,62 \\ y(t) = -2,86t^3 + 2,28t^2 - 1,38t + 6,96 \end{cases}$$

$$B_{18}(t) \begin{cases} x(t) = 0,34t^2 - 0,64t + 7 \\ y(t) = 0,14t^2 + 0,28t + 5 \end{cases}$$

$$B_{19}(t) \begin{cases} x(t) = 0,04t^2 - 0,36t + 6,7 \\ y(t) = -0,08t^2 - 0,28t + 5,42 \end{cases}$$

$$B_{20}(t) \begin{cases} x(t) = -1,4t^3 + 3t^2 + 0,36t + 2,26 \\ y(t) = 3,05t^3 - 2,58t^2 - 1,17t + 4,94 \end{cases}$$

$$B_{21}(t) \begin{cases} x(t) = -1,2t^3 + 0,6t^2 - 1,14t + 6,38 \\ y(t) = 3,04t^3 - 2,82t^2 - 1,14t + 5,06 \end{cases}$$

$$B_{22}(t) \begin{cases} x(t) = 0,1t^2 + 0,32t + 4,22 \\ y(t) = -0,3t^2 + 0,2t + 4,24 \end{cases}$$

$$B_{23}(t) \begin{cases} x(t) = 0,54t^2 - 0,24t + 2,26 \\ y(t) = -0,4t^2 + 0,92t + 4,94 \end{cases}$$

$$B_{24}(t) \begin{cases} x(t) = 0,8t + 2,56 \\ y(t) = -1,5t^2 + 1,6t + 5,46 \end{cases}$$

$$B_{25}(t) \begin{cases} x(t) = 0,56t + 3,36 \\ y(t) = -0,82t^2 + 0,8t + 5,56 \end{cases}$$

$$B_{26}(t) \begin{cases} x(t) = -1,08t^3 + 1,14t^2 + 0,24t + 3,92 \\ y(t) = -0,34t^3 + 0,3t^2 - 1,26t + 5,54 \end{cases}$$

$$B_{27}(t) \begin{cases} x(t) = -0,4t^2 - 0,12t + 6,38 \\ y(t) = -0,92t^2 + 1,28t + 5,06 \end{cases}$$

$$B_{28}(t) \begin{cases} x(t) = -0,6t^2 - 0,2t + 5,86 \\ y(t) = -1,34t^2 + 1,56t + 5,42 \end{cases}$$

$$B_{29}(t) \begin{cases} x(t) = 0,36t^2 - 0,92t + 5,06 \\ y(t) = -0,92t^2 + 0,64t + 5,64 \end{cases}$$

$$B_{30}(t) \begin{cases} x(t) = 0,38t^3 + 0,06t^2 - 0,3t + 4,5 \\ y(t) = 0,16t^3 - 0,18t^2 - 1,2t + 5,36 \end{cases}$$



Figura 4.11

2.2. Otras aplicaciones

Además de las aplicaciones que hemos tratado, estas curvas tienen un empleo mayor. En el campo del diseño en 3D destaca la “tetera de Utah”, un modelo tridimensional que realizó Martin Newell en 1974 basándose en las curvas de Bézier. Debido a su fidelidad, pronto fue empleada en muchos proyectos, como en Toy Story, o incluso en los Simpsons, y ha pasado a la historia como un objeto de culto.

También se desarrollaron las superficies de Bézier, pero éstas exceden el propósito de esta monografía.



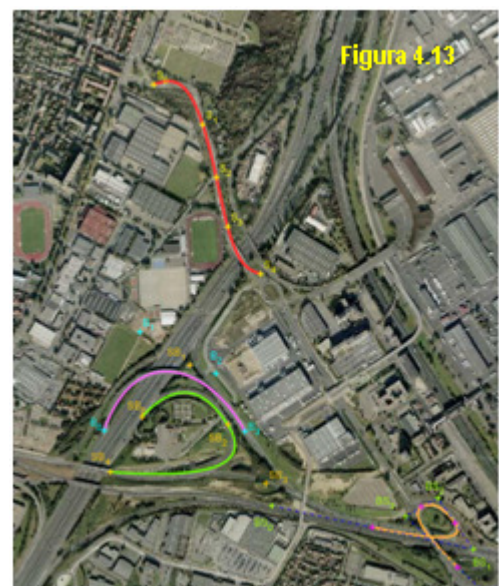
Para concluir el trabajo, hemos diseñado una situación más que es un claro ejemplo de la utilidad de las matemáticas tratadas en la vida real: una salida a una autopista de las afueras de París.

En la imagen se advierte una gran confluencia de distintos tramos de carreteras que se enlazan y divergen según las necesidades de acceso a la capital francesa.

Para dibujarlas todas ellas hemos recogido todos los métodos anteriores: *splines* de funciones cúbicas, curvas de Bézier, *splines* de curvas de Bézier y *B-Splines*.

Para comenzar con el *spline* cúbico (en rojo, en la figura 4.13) determinamos los puntos de unión entre las funciones que lo forman:

$$\begin{array}{ll}
 S_0(3,25 ; 11,31) & S_1(4,34 ; 10,43) \\
 S_2(4,64 ; 9,27) & S_3(4,89 ; 8,18) \\
 S_4(5,61 ; 7,14) &
 \end{array}$$



Obligamos a que las funciones pasen por estos puntos y a que las derivadas de los diferentes tramos coincidan en los empalmes:

$$S(x) \begin{cases} P_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x \in [3,25; 4,34] \\ P_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & x \in [4,34; 4,64] \\ P_3(x) = Ix^3 + Jx^2 + Kx + L & x \in [4,64; 4,89] \\ P_4(x) = Mx^3 + Nx^2 + Ox + P & x \in [4,89; 5,61] \end{cases}$$

Resolviendo un sistema semejante a los de las primeras explicaciones:

$$S(x) \begin{cases} P_1(x) = -0.95808 x^3 + 9.34131 x^2 - 30.02831 x + 43.12359x & x \in [3,25; 4,34] \\ P_2(x) = 1.74612 x^3 - 25.86736 x^2 + 122.77732 x - 177.93521 & x \in [4,34; 4,64] \\ P_3(x) = 8.36165 x^3 - 117.95555 x^2 + 550.06653 x - 838.8092 & x \in [4,64; 4,89] \\ P_4(x) = -2.18047 x^3 + 36.69724 x^2 - 206.1856 x + 393.88178 & x \in [4,89; 5,61] \end{cases}$$

La curva de Bézier y el *B-Spline* (en rosa y en naranja, respectivamente) son más fáciles de calcular en cuanto a que sólo debemos elegir los puntos de manera que sus formas se adapten a las de las autovías.

Así, con los puntos: $B_0(2,16; 3,70)$ $B_1(2,94; 5,86)$ $B_2(4,62; 4,96)$ $B_3(5,27; 3,68)$

la curva de Bézier es: $B(t) \begin{cases} x(t) = -1,93t^3 + 2,7t^2 + 2,34t + 2,16 \\ y(t) = 2,68t^3 - 9,18t^2 + 2,16t + 3,7 \end{cases}$

O el *B-Spline* de puntos: $BS_0(5,86; 2,05)$ $BS_1(10,3; 1,09)$
 $BS_2(9,52; 2,22)$ $BS_3(8,82; 1,82)$ $BS_4(11,12; -0,43)$

tiene por ecuación: $BS(t) \begin{cases} x(t) \begin{cases} -2,61t^2 + 14,88t - 11,24 & t \in [2, 3] \\ 0,04t^2 - 1,02t + 12,61 & t \in [3, 4] \\ 1,5t^2 - 12,7t + 35,97 & t \in [4, 5] \end{cases} \\ y(t) \begin{cases} 1,045t^2 - 5,14t + 7,67 & t \in [2, 3] \\ -0,765t^2 + 5,72t - 8,62 & t \in [3, 4] \\ -0,925t^2 + 7t - 11,18 & t \in [4, 5] \end{cases} \end{cases}$

Para el *spline* de curvas de Bézier (en verde) que queda por determinar elegimos una continuidad de tipo C^1 . Por lo tanto, si los puntos de la primera curva son:

$SB_0(3,00; 4,00)$ $SB_1(4,05; 5,15)$ $SB_2(4,89; 3,84)$

los dos que obtenemos son: $SB_3(5,73; 2,53)$ $SB_4(2,30; 2,79)$

y las curvas: $SB_1(t) \begin{cases} x(t) = -0,21t^2 + 2,1t + 3 \\ y(t) = -2,46t^2 + 2,3t + 4 \end{cases}$ $SB_2(t) \begin{cases} x(t) = -4,27t^2 + 1,68t + 4,89 \\ y(t) = 1,57t^2 - 2,62t + 3,84 \end{cases}$

Conclusiones

Siguiendo un desarrollo coherente en la evolución y por lo tanto en la complejidad de los procedimientos, hemos introducido los polinomios de Bernstein, base de las curvas de Bézier, con las consecuentes justificaciones de sus propiedades.

Más adelante, la monografía se enfoca ya al análisis de las curvas: las curvas de Bézier, los *splines* de curvas de Bézier y los *B-Splines*, deduciendo cada una de la anterior.

A causa del éxito de las curvas de Bézier, son éstas las más abordadas en el estudio. A parte de demostrar todas sus propiedades más particulares e interesantes, obtenemos durante el proceso una fórmula original que permite expresar las curvas de Bézier normalmente conocidas como:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i \quad , \quad t \in [0, 1]$$

de una nueva forma:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i \left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P_k (-1)^{i+k} \right] \quad , \quad t \in [0, 1]$$

expresión que constituirá uno de los “puntos fuertes” de los resultados gracias a su práctica aplicación posterior.

La monografía no se profundiza tanto en los *B-Splines*, ya que supondría una extensión mayor a la oportuna. En cambio, sí que se tratan algunas características que los relacionan con las curvas anteriores.

De la misma manera se podría ampliar la investigación a posteriores tipos de *splines*, como pueden ser las curvas de Hermite o los *splines* de Catmull Roll. Todos éstos constituirían una posible y sólida base para continuar el ensayo.

Finalmente se deben mencionar las diversas utilidades que recoge el apartado final de aplicaciones en el que se resuelve realmente el problema inicial. El programa informático GeoGebra y, la aplicación Derive en menor medida, han sido indispensables para el diseño de letras y dibujos gráficos.

En resumen, podemos concluir que, además de otras cuestiones, se ha solucionado el problema de la investigación que trataba del diseño de carreteras. Y se ha superado con creces por todo ello el objetivo planteado al comienzo de la investigación.

Bibliografía

1. Fuentes bibliográficas principales

ALBERICH, J. (2004). "Las flores de Bézier. Elasticidad e inestabilidad en el grafismo digital interactivo". *Artnodes* [artículo en línea]. UOC. [Fecha de consulta: 14 junio 2010].
<<http://www.uoc.edu/artnodes/esp/art/pdf/alberich1204.pdf>> ISSN 1695-5951

ARGUEDAS, V.; MATA, R. "Algunos aspectos de polinomios de Bernstein, Bezier y trazadores" *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet*. Disponible en Web:
<<http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV5n1Jun2004/MataArguedas/index.html>>

GÁMEZ RUIZ, J. L. (2009). Funciones a trozos: *splines*. Áreas y primitivas: "esa misteriosa relación", en: *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, pág. 27-41. Ministerio de educación. ISBN: 978-84-369-4766-3.
Disponible en Web: <<http://books.google.es/books?id=4WFd43REgEYC>>

PALUSZNY, M.; PRAUTZSCH, H.; BOEHM, W. (2005). *Métodos de Bézier y B-Splines*. Karlsruhe: Universitätsverlag Karlsruhe. ISBN: 3-937300-47-3.
Disponible en Web: <<http://books.google.es/books?id=EP-mijyNnvgC>>

SHENE, C. K. (2008). *CS3621 Introduction to Computing with Geometry Notes* [en línea]. Michigan Technological University.
<<http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>> [Fecha de consulta: 03 julio 2010].

2. Otras fuentes de consulta

ABBATE, H. *Curvas // Curvas 2.pdf* [en línea]. <<http://materias.fi.uba.ar/6671/Curvas%202.pdf>>
[Fecha de consulta: 3 julio 2010]

B-Splines // B-splines2009.pdf [en línea]. Universidad Rey Juan Carlos.
<<http://dac.escet.urjc.es/rvmaster/rvmaster/asignaturas/mga/B-splines2009.pdf>>
[Fecha de consulta: 5 julio 2010]

Curvas paramétricas // repaso_Bézier.pdf [en línea]. Universidad Rey Juan Carlos.
<http://dac.escet.urjc.es/rvmaster/rvmaster/asignaturas/mga/repaso_bezier.pdf>
[Fecha de consulta: 5 julio 2010]

3. Material interactivo

GeoGebra: <<http://www.geogebra.org/>>

bezier.ggb - Shows a Bezier curve up to 7 points. Segments shows how it is constructed. Animate the t variable to draw the line. By David Sankey.

bezier.ggt - two tools for quadratic and cubic Bezier curves.

bezier3.ggb - construction of a Bezier curve of 3rd degree as a locus line, by Markus Hohenwarter.

B_Spline.ggb - a tool to create B-Splines, by Víctor Ceballos Inza.

QuadraticBezier.ggb - Worksheet showing how to construct a parabola from a quadratic Bezier curve by Sean Palmer (also depicts DeCasteljau method).

Apéndice

1. El algoritmo de De Casteljaou

Para analizar las curvas de Bézier se puede recurrir al algoritmo de De Casteljaou²¹, que permite calcular puntos concretos sobre la curva sin necesidad de conocer su ecuación. Se trata de una forma recursiva de expresar estas curvas:

$$B(t) = B_{P_0}^{P_n}(t) = (1-t)B_{P_0}^{P_{n-1}}(t) + t \cdot B_{P_1}^{P_n}(t)$$

Con este algoritmo, se puede calcular la curva de Bézier de $n + 1$ puntos, $B_{P_0}^{P_n}(t)$, desde P_0 hasta P_n , combinando curvas de menor grado; curvas de Bézier de n puntos: $B_{P_0}^{P_{n-1}}(t)$ y $B_{P_1}^{P_n}(t)$, desde P_0 hasta P_{n-1} y desde P_1 hasta P_n , respectivamente.

Al desarrollar la expresión se demuestra que es igualmente válida que la forma habitual de obtener las curvas de Bézier:

$$B(t) = B_{P_0}^{P_n}(t) = (1-t)B_{P_0}^{P_{n-1}}(t) + t \cdot B_{P_1}^{P_n}(t)$$

$$B(t) = (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_i (1-t)^{(n-1)-i} t^i + t \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_{i+1} (1-t)^{(n-1)-i} t^i$$

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_{i+1} (1-t)^{(n-1)-i} t^{i+1}$$

$$B(t) = \binom{n-1}{0} P_0 (1-t)^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} P_{i+1} (1-t)^{(n-1)-i} t^{i+1} + \binom{n-1}{n-1} P_n t^n$$

$$B(t) = \binom{n-1}{0} P_0 (1-t)^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} P_{(i-1)+1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)} t^{(i-1)+1} + \binom{n-1}{n-1} P_n t^n$$

²¹ Paul de Casteljaou fue otro ingeniero, contemporáneo de Bézier, que desarrolló un estudio paralelo sobre estas curvas. Sin embargo, no llegó a publicar sus resultados.

$$B(t) = P_0 (1-t)^n + \sum_{i=1}^{n-1} P_i (1-t)^{n-i} t^i \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] + P_n t^n$$

$$B(t) = P_0 (1-t)^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i + P_n t^n$$

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i$$

Gráficamente, se puede comprobar que, para curvas cuadráticas de Bézier, existen puntos intermedios desde Q_0 a Q_1 tales que t varía de 0 a 1 y:

- * Punto Q_0 varía de P_0 a P_1 y describe una curva lineal de Bézier.
- * Punto Q_1 varía de P_1 a P_2 y describe una curva lineal de Bézier.
- * $B(t)$ varía de Q_0 a Q_1 y describe una curva cuadrática de Bézier.

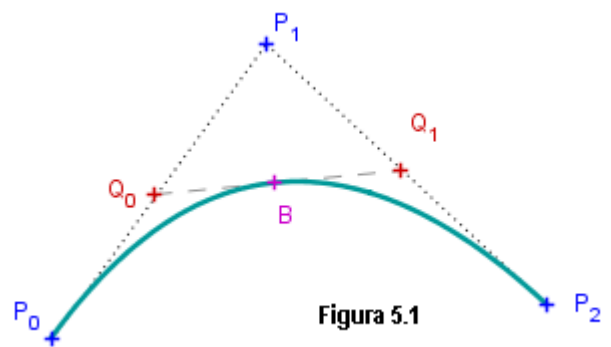


Figura 5.1

En el caso de las curvas cúbicas, se pueden encontrar puntos intermedios Q_0 , Q_1 y Q_2 que describen curvas lineales de Bézier y los puntos R_0 y R_1 que describen curvas cuadráticas:

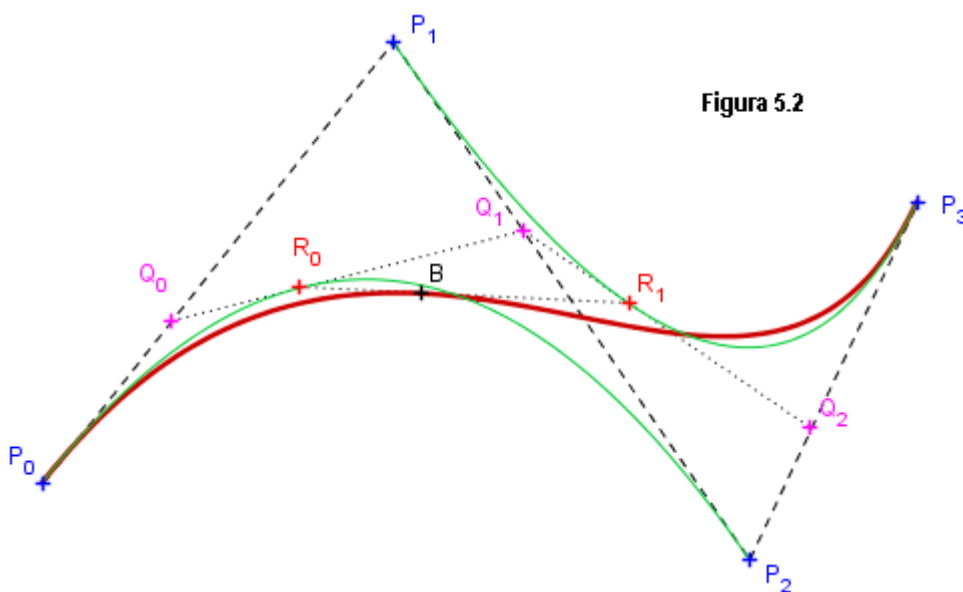


Figura 5.2

2. Los Basis Splines

2.1. Funciones de base de los B-Splines

Las funciones de base sobre las que se construyen los B-Splines forman, al igual que los polinomios de Bernstein, una base para el espacio vectorial de polinomios de grado k .

Dada la función de orden $k = 0$,

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

las funciones de órdenes sucesivos se obtienen mediante la fórmula recursiva:

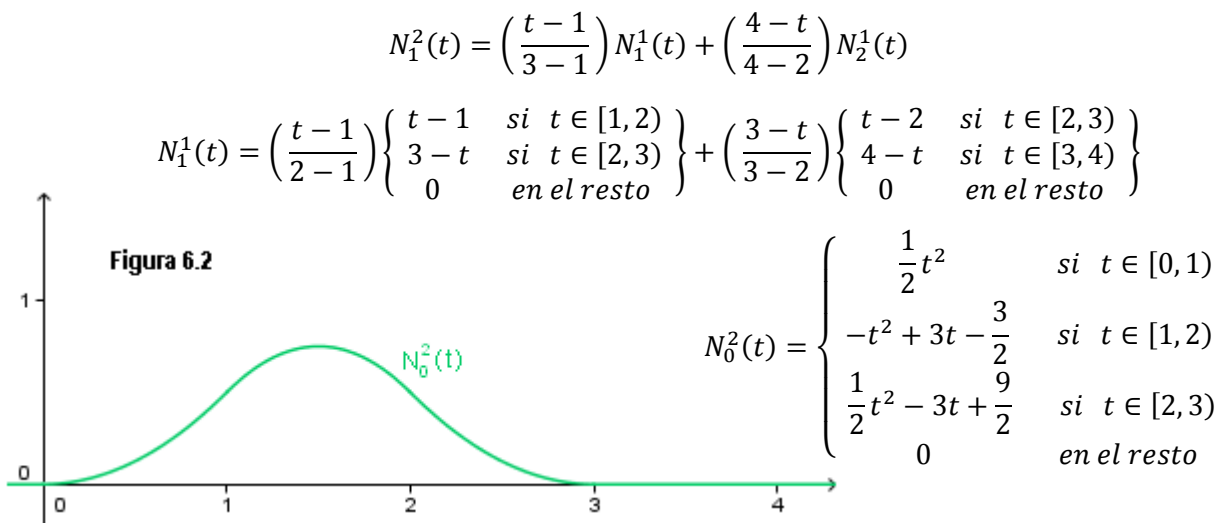
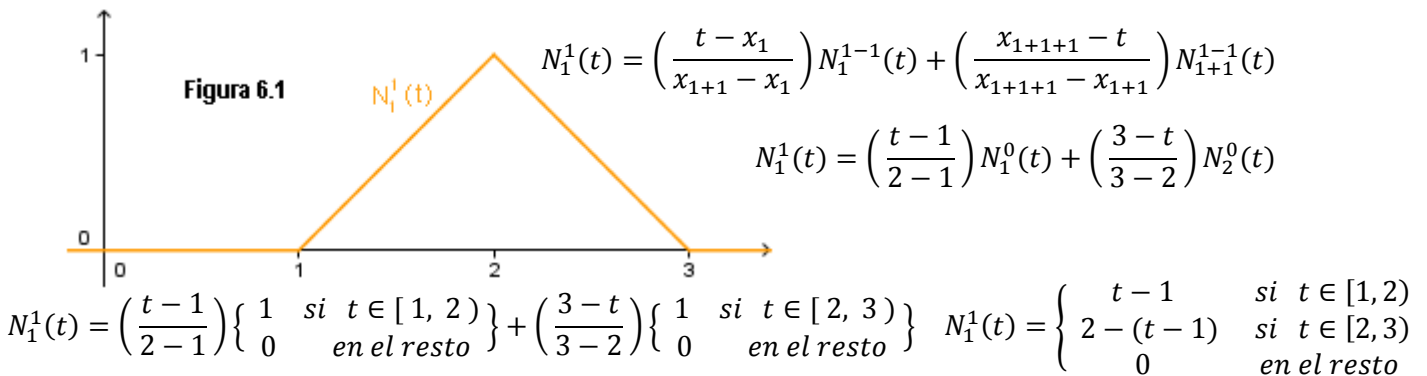
$$N_i^k(t) = \left(\frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} \right) N_i^{k-1}(t) + \left(\frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right) N_{i+1}^{k-1}(t)$$

siendo $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+k+1}]$ $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \leq x_{i+1}$

el vector define los nodos de unión entre los tramos de los B-Splines.

El vector de nodos define en gran parte, como se explicará en el siguiente apartado, el tipo y la forma de los B-Splines.

Para el vector de nodos $[0, 1, 2, 3, \dots]$, algunas funciones de base serán:



2.2. Tipos de vectores de nodos

La forma de los *B-Splines* viene determinada, fundamentalmente, por los nodos de unión entre las partes de curva que los forman. Así, se pueden distinguir diferentes tipos de vectores de nodos:

- Vectores de nodos uniformes o equiespaciados: Son aquellos cuyos nodos equidistan del anterior y del siguiente.
- Vectores de nodos "clamped" o agarrados: Aquellos cuyos nodos inicial y final tienen multiplicidad²² $k + 1$ y cuyos nodos interiores están equiespaciados.
- Closed knots o nodos cerrados: Son los vectores de nodos necesarios para construir *B-Splines* cerrados. Tienen que ser vectores uniformes entre $x_0 = 0$ y $x_{n+k+1} = 1$.
- Vectores de nodos no uniformes: Serán todos los vectores que no respondan a ninguna de las condiciones anteriores.

2.3. Propiedades de los B-Splines

- Los *B-Splines* tienen control local. Como cada punto de control está asociado a una única función de base, al cambiar un punto tan sólo se modifica una porción de la curva.

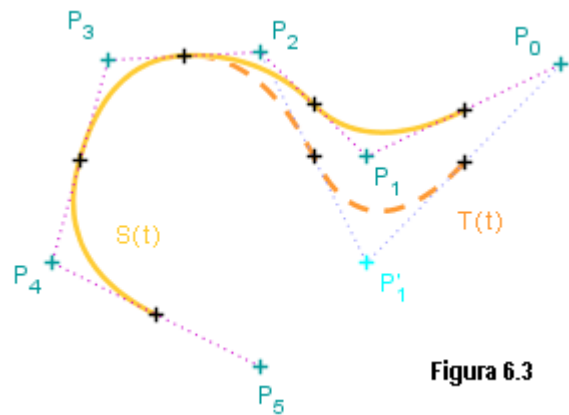


Figura 6.3

- Los *B-Splines*, formados a trozos por polinomios de grado k , se ajustarán más a los puntos de control cuanto menor sea el orden de la curva.
- Para que algún trozo de polinomio que forma un *B-Spline* sea un segmento recto basta con alinear $k + 1$ puntos de control.

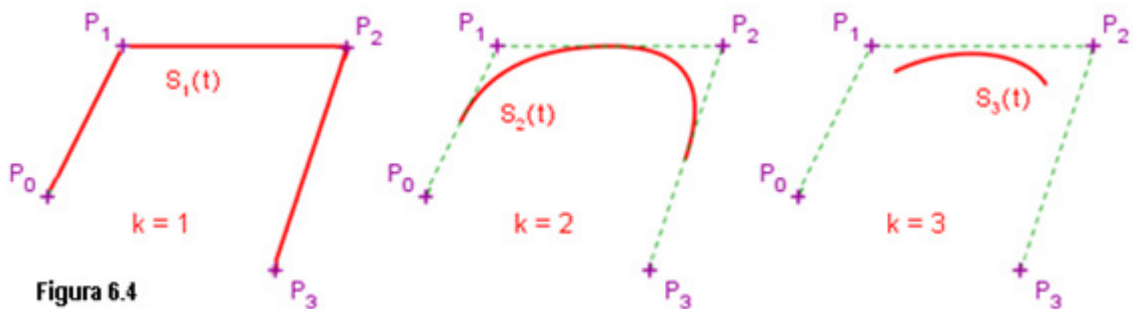


Figura 6.4

- Un *B-Spline* pasará por un determinado punto de control si está repetido k veces.
- Las curvas de Bézier son casos particulares de los *B-Splines*. Si el vector de nodos es de tipo "clamped" o agarrado, y el número de puntos de control es igual al orden de la curva, entonces el *B-Spline* coincide con una curva de Bézier.

²² Se entiende multiplicidad de un nodo el número de veces que está repetido dentro de un mismo vector.

2.4. Algoritmo de De Boor

El algoritmo de De Boor es una generalización del algoritmo de De Casteljau para las curvas de Bézier. Desarrollado por Carl R. de Boor²³, es un método rápido para calcular un punto del B-Spline asociado a un determinado nodo.

Si un nodo x_i se inserta k veces en un *B-Spline*, entonces el último punto de control que se genera es el punto de la curva, que se corresponde con $t = x_i$.

$$\text{Un B-Spline, } S(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) P_i, \quad t \in [x_k, x_{n+1}]$$

tiene por vector de nodos: $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+k+1}] \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \leq x_{i+1}$

Por tanto, el número de nodos de un *B-Spline* será $n + k + 1 + 1$.

$$\text{número de nodos} = (n + 1) + k + 1$$

$$\text{número de nodos} = \text{número de puntos de control} + \text{orden de la curva} + 1$$

Con lo que, al insertar un nodo, y para conservar la misma curva inicial, se necesitará un nuevo punto de control y recalculer los anteriores.

Al añadir el nodo x , siendo $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, hay que sustituir los puntos de control $P_{j-k+1}, \dots, P_{j-1}$ por los nuevos puntos P'_{j-k+1}, \dots, P'_j , tal que:

$$P'_i = \left(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\right) P_{i-1} + \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\right) P_i$$

Con la intención de simplificar el proceso, se pueden diferenciar dos situaciones:

- Si el nodo insertado coincide con un nodo simple (que no está repetido) ya existente, entonces:

$$x_i = x \leq x_{i+1}$$

$$P'_i = \left(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\right) P_{i-1} + \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\right) P_i$$

$$P'_i = P_{i-1}$$

- Si el nodo insertado coincide con un nodo múltiple (de multiplicidad m) ya existente, entonces:

$$P'_i = P_{i-1}, \quad P'_{i-1} = P_{i-2}, \quad \dots, \quad P'_{i-m+1} = P_{i-m}$$

²³ Carl-Wilhelm Reinhold de Boor es un matemático alemán nacido en 1937. Tras años de investigación y reconocimientos en este campo (durante los que llegó a trabar con Isaac Schoenberg), actualmente es profesor emérito de la Universidad de Wisconsin-Madison.